EXPERIMENTO 2

OSCILACIONES TRANSVERSALES EN UNA CUERDA

1. Objetivos

Una cuerda continua constituye un ejemplo de un sistema con infinitos grados de libertad y por lo tanto un número infinito de modos fundamentales, los que necesariamente deberán depender de la longitud de la cuerda. Además intuitivamente podemos conjeturar que la velocidad de propagación de ondas en una cuerda deberá depender de la tensión y de la densidad de la misma. En este experimento perseguimos dos objetivos:

a) Investigar la relación entre la longitud de la cuerda y las frecuencias de los modos.
b) Investigar la dependencia de la velocidad de propagación con la tensión y con la densidad de la cuerda, o bien, más generalmente, obtener la relación de dispersión para una cuerda.

2. Bases teóricas

Una cuerda continua puede ser visualizada como el caso límite ($N \to \infty$) de N masas acopladas donde la masa $M \to 0$. Intuitivamente podemos visualizar los modos vibracionales como se indica en la Fig. 1.

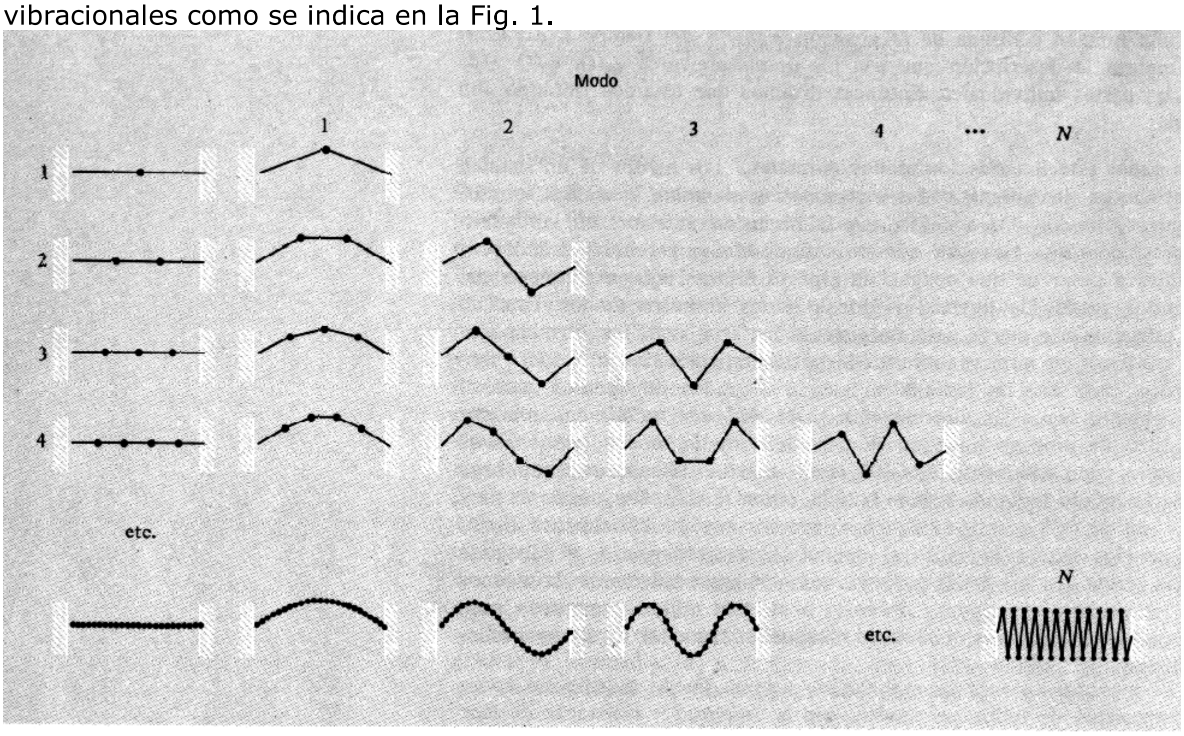

Figura 1

¿Cómo se pueden caracterizar esos modos?
Consideremos una onda sinusoidal que se transmite por la cuerda, expresada en la forma

$$y_1 = A \text{ sen } 2\pi(x/\lambda - t\nu) \qquad (1)$$

Cuando esta onda llega a un extremo fijo, se genera una onda reflejada

$$y_2 = A \text{ sen } 2\pi(x/\lambda + t\nu) \qquad (2)$$

que interfiere con la onda original, dando una onda resultante

$$y = y_1 + y_2 = A \text{ sen } 2\pi(x/\lambda - t\nu) + A \text{ sen } 2\pi(x/\lambda + t\nu)$$

Usando la relación trigonométrica

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } (\alpha+\beta)/2 \cos (\alpha-\beta)/2$$

obtenemos:

$$y = 2A \text{ sen } (2\pi x/\lambda) \cos (2\pi t\nu)$$

Esta ecuación se comporta de la siguiente manera: en un instante fijo t_0 (una foto) es una onda sinusoidal A_m sen$(2\pi x/\lambda)$ con amplitud $A_m = 2A \cos(2\pi t_0 \nu)$. En una posición fija x_0, la cuerda oscila armónicamente con una amplitud $2A\text{sen}(2\pi x_0/\lambda)$; o sea en los puntos $x_0=\lambda/4$, $3\lambda/4$, $\lambda 5/4$,..., la amplitud es máxima mientras que en los puntos $x_0= \lambda/2$, λ, $3\lambda/2$, 2λ,..., la amplitud es nula.
La forma envolvente de la onda resultante se representa en la Fig. 2 y se denomina <u>onda estacionaria</u> porque no se propaga a lo largo de la cuerda.
Pensemos ahora qué pasa en una cuerda que está fija en ambos extremos y tiene una longitud L. Cada onda que llega a un extremo se refleja e interfiere con las otras. En general, las ondas provenientes de esas reflexiones múltiples no estarán todas en fase y la amplitud resultante será pequeña. Sólo para ciertas frecuencias podrá ocurrir que las ondas múltiplemente reflejadas estarán en fase resultando una onda estacionaria de gran amplitud. Éstas serán las frecuencias de <u>resonancia</u> del sistema y son justamente las frecuencias de los modos vibracionales.

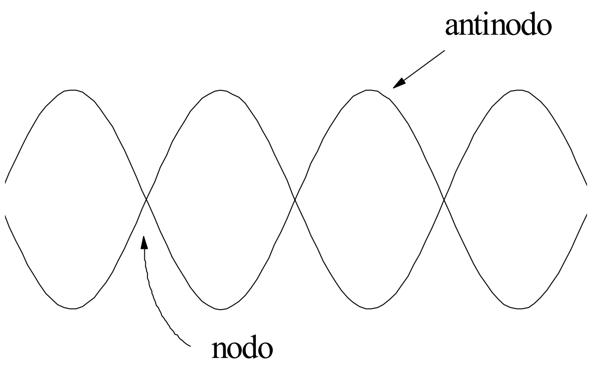

figura 2

La intuición nos dice que esas frecuencias deben ser justamente aquellas que hacen que en la cuerda de longitud L quepa precisamente un número entero de semi-longitudes de onda, es decir

$$\lambda = 2L/n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4,... \tag{4}$$

Por lo tanto uno de nuestros objetivos será investigar esta relación. Por otra parte, si bien la onda estacionaria no se propaga, las ondas que la generan por superposición lo hacen a una velocidad $v = \lambda\nu = w/k$. Si esta cantidad es constante, la onda es <u>no-dispersiva</u>, mientras que si depende de k es <u>dispersiva</u> y la relación entre w y k se conoce como <u>relación de dispersión</u>. Nuestro segundo objetivo es investigar la relación de dispersión para una cuerda. Para ello necesitamos tener una idea de los parámetros que pueden afectar w/k. Intuitivamente (por el significado de w) podemos visualizar que w/k debe <u>aumentar</u> con la tensión T de la cuerda y <u>disminuir</u> con la densidad lineal μ de la misma. La forma más simple de expresar esto con la condición de que w/k tenga unidades de velocidad, es proponiendo la relación:

$$\frac{w}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{5}$$

3. Procedimiento

Utilizaremos el equipo esquematizado en la Fig. 3, compuesto por un sonómetro, un generador de frecuencias y un osciloscopio. Este equipamiento nos permite variar la longitud L de la cuerda, la tensión T sobre la misma, la densidad lineal μ de la cuerda (utilizando diferentes cuerdas) y la frecuencia de excitación de la cuerda.

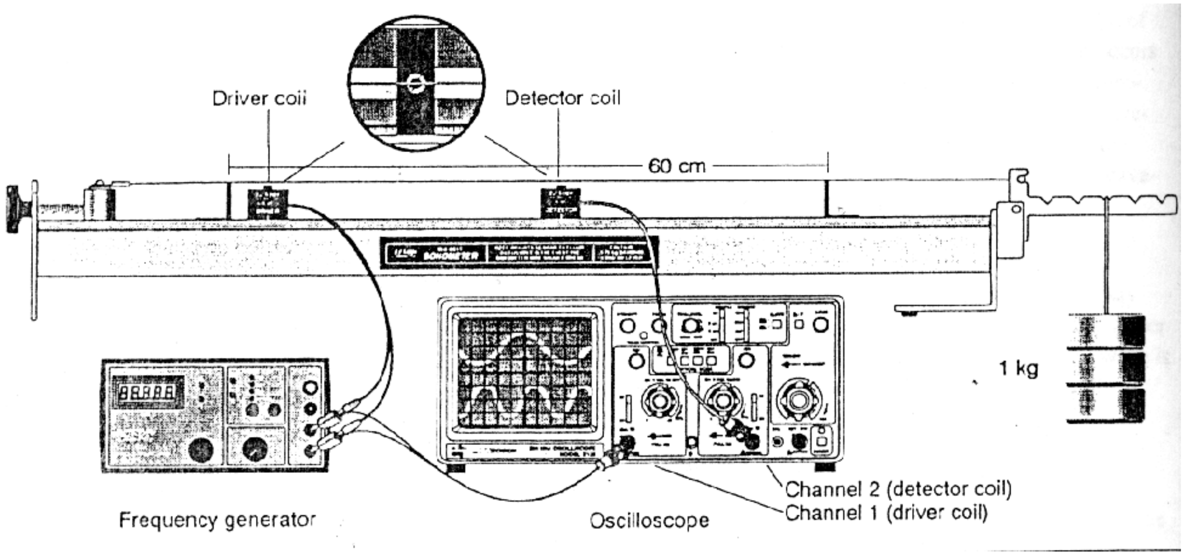

Figura 3

a) Modos resonantes

Con una cuerda de densidad y tensión fija:

1. Seleccionar una longitud L.
2. Variando la frecuencia de excitación encontrar el primer modo resonante (esto ocurrirá cuando se obtiene la máxima amplitud en el osciloscopio).
3. Moviendo la bobina detectora, localizar la posición de los nodos y antinodos.
4. Incrementando la frecuencia de excitación repetir el procedimiento para otros modos (por lo menos 5 o 6).
5. Cambiar L y repetir.
6. Analizar los resultados obtenidos (por ejemplo representando λ versus L).

¿Qué relación hay entre la frecuencia del modo más bajo y las de los otros modos?

b) Relación de dispersión

En la parte a) se midió ν y λ (y, por lo tanto, w y k) para cada modo resonante en una cuerda con T y μ fijos, variando L. Ahora haremos lo equivalente con L fijo, variando T y μ.

Con todos los datos obtenidos, representar w/k versus $\sqrt{T}$; w/k versus $\sqrt{\frac{1}{\mu}}$ y w versus k.

Analizar los resultados y obtener las respectivas conclusiones.