

# Unidad 3

## Campos electrostáticos y magnetostáticos

31 de julio de 2018

### 1. Ecuaciones de Maxwell para campos estáticos

En esta unidad estudiaremos los campos electromagnéticos producidos por distribuciones de cargas y corrientes **estáticas**. Es decir, supondremos que las fuentes que generan los campos no dependen del tiempo (cada una de las derivadas temporales será cero). De esta forma las **ecuaciones de Maxwell para campos estáticos** se pueden escribir como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (4)$$

A partir de las relaciones anteriores, notemos que **bajo condiciones estáticas los campos eléctricos y magnéticos se encuentran desacoplados**.

A continuación estudiaremos los campos electrostáticos y posteriormente, en la sección subsiguiente, los campos magnetostáticos. Por simplicidad supondremos que los medios con los que trabajamos son homogéneos e isótropos, de tal forma que en todo momento consideraremos que el desplazamiento se puede escribir como  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  y la intensidad magnética como  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ .

### 2. Campos eléctricos estáticos

#### 2.1. Potencial escalar eléctrico

Como hemos destacado anteriormente, bajo condiciones estáticas los campos eléctricos deben satisfacer las ecuaciones (1) y (2). En especial esta última,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , expresa que el campo eléctrico es irrotacional en todo el espacio y por lo tanto es conservativo (considere el teorema de Stokes):  $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Para convencernos de que este resultado es correcto, tomemos como ejemplo el campo eléctrico producido por una carga puntual  $q$  situada en el origen de coordenadas. Usando la ley de Gauss podemos deducir que para el vacío

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (5)$$

la cual se conoce como **ley de Coulomb**. En coordenadas esféricas, la integral de línea entre dos puntos arbitrarios del espacio,  $p_1$  y  $p_2$ , es igual a

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{a}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot (\mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin\theta d\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

De esta forma cualquier trayectoria cerrada que contiene los puntos  $p_1$  y  $p_2$  siempre será cero:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{p_2}^{p_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 0.$$

Por otro lado, tomando en cuenta la ecuación (2) y que el rotor de un gradiente siempre es cero [ver unidad 1, ecuación (79)], concluimos que el campo electrostático puede escribirse como

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\Phi}, \quad (6)$$

donde a la función  $\Phi$  se la denominada **potencial escalar eléctrico** (el signo menos no es esencial y sólo ha sido incluido por convención). La anterior es una de las expresiones más importantes de la electrostática. Como una consecuencia de la ecuación (6), tenemos que la integral de línea del campo eléctrico (multiplicado por  $-1$ ) entre dos puntos del espacio  $P_1$  y  $P_2$  será igual a

$$-\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1. \quad (7)$$

El resultado anterior es válido sea cual sea la trayectoria de integración elegida para unir ambos puntos del espacio.

Deduciremos a continuación una expresión integral para el potencial  $\Phi$  en función de la distribución de carga de un sistema. Para una distribución continua de carga  $\rho_v$ , la ley de Coulomb (5) puede generalizarse como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dv', \quad (8)$$

donde la distancia  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  y el vector unitario  $\mathbf{a}_R$  está dirigido desde el elemento diferencial de volumen situado en el punto  $P'$ , al punto  $P$  en el cual estamos evaluando el campo eléctrico. La figura 1 (a) muestra un esquema que ilustra la disposición de estas cantidades para un sistema de coordenadas cartesiano. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{a}_R = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , la ecuación (8) puede reescribirse como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (9)$$

Luego si consideramos que

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right), \quad (10)$$

donde el operador  $\nabla$  opera sobre las variables sin primar, entonces nuevamente podemos reescribir la ecuación (9) como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right). \quad (11)$$

Comparando la expresión anterior con la ecuación (6), vemos que el potencial escalar  $\Phi$  puede expresarse como

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'}. \quad (12)$$

Si las distribuciones de carga están dadas por densidades superficiales o lineales, entonces es

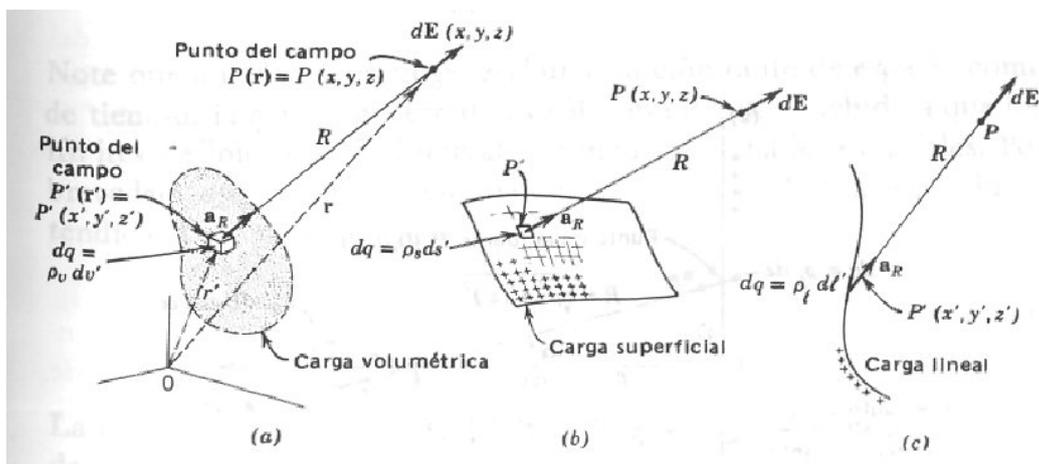


Figura 1: Geometrías relativas al cálculo del campo eléctrico debido a una distribución de carga (a) volumétrica, (b) superficial y (c) lineal.

posible escribir expresiones equivalentes para el potencial escalar [ver figuras 1 (b) y (c)]

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \quad (13)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'. \quad (14)$$

En el caso de una partícula puntual localizada en el origen de coordenadas, la cual está caracterizada por la densidad de carga  $\rho_v = q\delta(\mathbf{r})$ , el potencial escalar eléctrico (12) será

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}. \quad (15)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6), es fácil comprobar que un mismo campo eléctrico puede obtenerse a partir de una multitud de potenciales eléctricos, siempre y cuando estos difieran entre sí por una constante aditiva. En otras palabras, los potenciales  $\Phi$  y  $\Phi' = \Phi + \Phi_0$ , donde  $\Phi_0$  es una constante, corresponden a un mismo campo  $\mathbf{E}$ . A  $\Phi_0$  se la denomina **referencia de potencial** y en las ecuaciones (12), (13) y (14), implícitamente se ha tomado  $\Phi_0 = 0$  para puntos alejados una distancia infinita de la distribución de carga.

## 2.2. Sistema de conductores en campos electrostáticos

Como hemos analizado en la unidad anterior, cualquier exceso de carga libre en un conductor siempre tenderá a fluir hacia la superficie del material. Bajo condiciones estáticas no existirán corrientes en ningún punto del material. De esta forma, suponiendo válida la ley de Ohm  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , se deduce que en el interior de un conductor el campo eléctrico será nulo y el potencial constante:

$$\boxed{\mathbf{E} = 0 \quad \text{y} \quad \Phi = \text{cte.}} \quad (\text{en el interior de un conductor}). \quad (16)$$

Por otro lado, en la superficie, donde se ha acumulado el exceso de carga libre, el campo eléctrico sólo puede tener una componente normal. Para deducir este resultado, nuevamente debemos considerar la ley de Ohm. Bajo condiciones estáticas no pueden existir corrientes superficiales, por lo que la componente tangencial del campo  $E_t$  allí debe ser nula. No obstante,

la componente normal a la superficie  $E_n$  puede ser diferente de cero ya que la conductividad para dicha dirección es nula (en principio estamos suponiendo que las cargas no pueden abandonar la superficie del material conductor). Otra forma de comprobar este resultado, es considerando que en una interacción la componente tangencial del campo eléctrico es continua: como en la superficie del lado del interior  $E_{t2} = 0$ , entonces en la parte exterior debemos tener que  $E_{t1} = 0$ .

Para calcular el valor del campo eléctrico en la superficie de un conductor, consideremos ahora la condición de frontera para la componente normal del desplazamiento,  $D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$ . Como en el interior  $D_{n2} = 0$ , en el exterior simplemente tendremos que  $D_{n1} = D_n = \rho_s$  o  $E_{n1} = E_n = \rho_s/\epsilon$ . En conclusión

$$\boxed{E_n = \rho_s/\epsilon \quad \text{y} \quad E_t = 0} \quad (\text{en la superficie de un conductor}). \quad (17)$$

Tomando en cuenta que el campo eléctrico es normal a la superficie y que, de acuerdo a la ecuación (6), proviene del gradiente de una función escalar, deducimos que bajo condiciones estáticas la superficie de un conductor será un equipotencial. Como dentro del material el campo eléctrico es nulo, este equipotencial se extenderá hacia su interior.

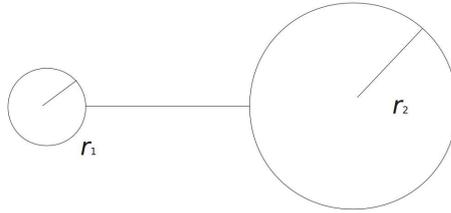


Figura 2: Un par de esferas de radios  $r_1$  y  $r_2$ , que están unidas mediante un cable conductor.

Aplicando estos conceptos es posible, por ejemplo, demostrar por qué el campo eléctrico es tan intenso en la punta de un pararrayos (propiedad que permite que los rayos elijan estos puntos para descargar). Por simplicidad, supongamos que tenemos dos esferas conductoras de diferentes radios  $r_1$  y  $r_2$ , las cuales están muy alejadas entre sí pero unidas por un cable conductor [ver figura 2] y además contienen en su superficie sendas cargas  $q_1$  y  $q_2$ . En condiciones estáticas los potenciales de las esferas serán iguales. Empleando la ecuación (13) es fácil demostrar que

$$\Phi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_2}. \quad (18)$$

La componente normal del campo eléctrico en la superficie de la esfera 1 será

$$E_{n1} = \frac{\rho_{s1}}{\epsilon} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_1^2} = \frac{\Phi}{r_1}, \quad (19)$$

y para la esfera 2 será

$$E_{n2} = \frac{\rho_{s2}}{\epsilon} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_2^2} = \frac{\Phi}{r_2}. \quad (20)$$

Considerando las tres últimas relaciones, tenemos que

$$E_{n1} r_1 = E_{n2} r_2 \quad (21)$$

o

$$\boxed{E_{n1} = \frac{r_2}{r_1} E_{n2}}. \quad (22)$$

De esta forma si  $r_1 < r_2$  entonces  $E_{n1} > E_{n2}$ , es decir, el campo es más intenso en las regiones de menor curvatura. Ya que la punta de un pararrayos posee una curvatura mucho menor que su mástil, el campo eléctrico en su extremo será tan intenso como para que un gran número de líneas de flujo de campo eléctrico convergerán hacia él.

## 2.3. Capacitancia

Los capacitores o condensadores son dispositivos simples que se usan para almacenar o liberar carga eléctrica o, como veremos luego, energía de un campo eléctrico. En la práctica están formados por dos conductores separados por vacío o por un material dieléctrico. La figura 3 (a) muestra un esquema general de un capacitor de este tipo. Si conectamos una fuente de tensión, uno de los conductores adquirirá una carga positiva  $q$  y el otro una carga negativa  $-q$  de la misma magnitud.

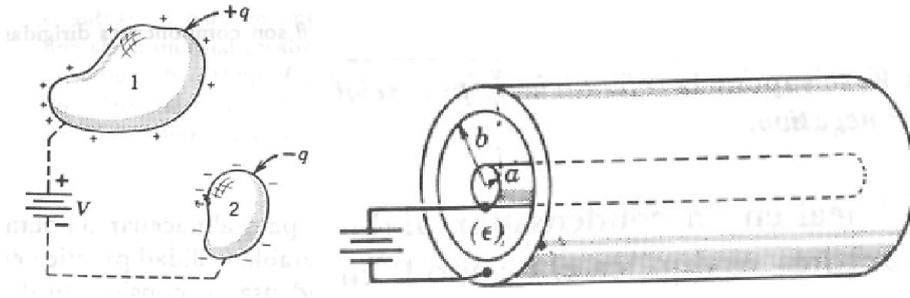


Figura 3: (a) [Izquierda] Un par de conductores arbitrarios sometidos a una diferencia de potencial  $V$ . (b) [Derecha] Capacitor cilíndrico coaxial.

Bajo condiciones estáticas, este sistema de dos conductores posee las siguientes propiedades:

- a) La carga en cada uno de los conductores reside en la superficie

$$q = \int_{S_1} \rho_{s1} ds \quad y \quad -q = \int_{S_2} \rho_{s2} ds, \quad (23)$$

donde  $\rho_{s1}$  y  $\rho_{s2}$  son las densidades superficiales de carga en cada conductor.

- b) Las líneas de flujo de campo eléctrico se originan en forma normal en la superficie del conductor 1 cargado positivamente y terminan, también en forma normal, en el conductor 2 que tiene la carga negativa.
- c) Cada una de las superficies conductoras es un equipotencial. Tomando la referencia cero en el infinito, tenemos que la diferencia de potencial  $V$  entre ambos conductores es

$$V = \Phi_1 - \Phi_2 = \left[ - \int_{\infty}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right] - \left[ - \int_{\infty}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right] = - \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (24)$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son simplemente dos puntos en la superficie de los conductores 1 y 2, respectivamente.

Las propiedades anteriores son válida incluso para sistema formados por varios conductores cargados, donde cada uno de ellos quedará a un determinado potencial.

Si el medio dieléctrico es lineal, un cambio en las cargas que contienen ambos conductores en la figura 3 (a), producirá una variación proporcional tanto en el campo eléctrico en cada punto del espacio como en la diferencia de potencial  $V$ . Por lo tanto, podemos escribir que

$$\boxed{q = CV}, \quad (25)$$

donde  $C$  es una constante (medida en *farad*) que es conocida como la **capacitancia** del sistema de dos conductores. A partir de esta ecuación y de (24), podemos escribir una expresión útil que nos permite evaluar dicha cantidad

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{-\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}. \quad (26)$$

Como se muestra en la figura 3 (b), un ejemplo típico es el de un capacitor formado por dos conductores cilíndricos coaxiales de radios  $a$  y  $b$ , entre los cuales se encuentra un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ . Usando la expresión (26) podemos determinar la capacitancia de este sistema por unidad de longitud (supondremos que su longitud  $l \gg b$ ). Si la carga positiva  $q$  está situada en el conductor interior, lo primero que podemos hacer es calcular el campo eléctrico entre los cilindros usando la ley de Gauss. Considerando una superficie Gaussiana cilíndrica de radio  $\rho$ , con  $a < \rho < b$ , y longitud  $l$  obtenemos

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{q}{2\pi\epsilon\rho l}. \quad (27)$$

La diferencia de potencial entonces entre ambos conductores será

$$V = - \int_b^a \left( \mathbf{a}_\rho \frac{q}{2\pi\epsilon\rho l} \right) \cdot (\mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\phi d\phi + \mathbf{a}_z dz) = \frac{q}{2\pi\epsilon l} \ln \left( \frac{b}{a} \right), \quad (28)$$

y por lo tanto, usando la expresión (26), obtenemos una capacidad por unidad de longitud de

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}. \quad (29)$$

Notemos que  $C$  es una función de las dimensiones del capacitor y de la constante dieléctrica  $\epsilon$ . Este es un resultado general válido para medios lineales.

Además de los capacitores formados por dos electrodos, en la práctica es posible encontrar sistemas constituidos por un único conductor. En este caso, para cada valor de carga  $q$  (positiva o negativa), la superficie del conductor estará a un determinado potencial  $\Phi$ . Si tomamos la referencia de potencial cero en el infinito, entonces podemos escribir que  $V = \Phi$  y las ecuaciones (25) y (26) continuarán siendo válidas (con  $P_2 \rightarrow \infty$ ). Por ejemplo, se puede demostrar que la capacidad de una esfera de radio  $a$  embebida en un medio de permitividad  $\epsilon$ , es simplemente

$$C = 4\pi\epsilon a. \quad (30)$$

La demostración se deja como ejercicio para el alumno.

## 2.4. Energía del campo electrostático

La energía potencial almacenada en una configuración estática de cargas, puede determinarse siguiendo un **proceso de construcción cuasi-estático**. La idea consiste en suponer que inicialmente todas las cargas se encuentran muy alejadas unas de otras, esencialmente separadas por distancias infinitas. La configuración se ensambla trayendo las cargas de a una por vez (moviéndolas lentamente sin acelerarlas), para luego situarlas en su posición final. Debido a que la energía cinética es nula, la energía total del sistema será igual a la suma de todos los trabajos realizados por el agente externo para localizar a cada una de las cargas en su posición final.

Determinemos una expresión matemática para esta energía potencial. Supongamos que nuestro sistema está formado por  $n$  partículas puntuales que poseen cargas  $q_i$ , que están localizadas

en los puntos del espacio  $P_i$ , los cuales se encuentran separados entre sí por distancias  $R_{ij}$ , donde  $i$  y  $j$  son índices enteros que toman los valores  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Para ensamblar esta configuración, comenzamos trayendo desde el infinito la primera carga  $q_1$  hasta su posición final. En esta instancia no se realiza trabajo pues aún no existen otras cargas en el sistema que puedan aplicar una fuerza a  $q_1$ . En otras palabras, la energía de esta configuración preliminar será  $U_1 = 0$ . Por otro lado, cuando se trae a  $q_2$ , para seguir un proceso cuasi-estático el agente externo debe aplicar a la partícula 2 una fuerza  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  que contrarreste la fuerza  $\mathbf{F}_2^{(1)}$  que  $q_1$  ejerce sobre  $q_2$ . Es decir,  $\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{(1)} = 0$ , o

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_2^{(1)} = -q_2 \mathbf{E}_2^{(1)}, \quad (31)$$

donde  $\mathbf{E}_2^{(1)}$  es el campo eléctrico producido por la partícula 1 en la posición de 2. El trabajo realizado por esta fuerza externa es

$$U_2 = \int_{\infty}^{P_2} \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} = q_2 \left[ - \int_{\infty}^{P_2} \mathbf{E}_2^{(1)} \cdot d\mathbf{l} \right] = q_2 \Phi_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{12}}. \quad (32)$$

Notemos que si hubiésemos traído primero la partícula 2 y luego la 1, la energía potencial sería  $q_1 \Phi_1^{(2)}$ . Teniendo en cuenta la ecuación (32), es fácil ver que esta energía es igual a  $U_2$  pues  $q_1 \Phi_1^{(2)} = q_2 \Phi_2^{(1)}$ .

Al traer una nueva carga, por ejemplo la número 3 hasta  $P_3$ , teniendo en cuenta el teorema de superposición vemos que el trabajo realizado por la fuerza externa contra los campos producidos por  $q_1$  y  $q_2$  se puede expresar como

$$U_3 = q_3 \Phi_3^{(1)} + q_3 \Phi_3^{(2)}. \quad (33)$$

Siguiendo este proceso se pueden calcular las energías  $U_4, U_5, \dots, U_n$ . La energía electrostática total de la configuración será igual a

$$U_e = \sum_{s=1}^n U_s. \quad (34)$$

Para cada par de índices  $i$  y  $j$ , con  $i \neq j$ , esta suma contiene un único término de la forma  $q_i \Phi_i^{(j)}$  o  $q_j \Phi_j^{(i)}$ . Por otro lado, de acuerdo a (15), podemos comprobar que  $q_i \Phi_i^{(j)} = q_j \Phi_j^{(i)}$ . Teniendo en cuenta esta relación, podemos reescribir la energía electrostática como

$$U_e = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & q_1 \left[ \Phi_1^{(2)} + \Phi_1^{(3)} + \Phi_1^{(4)} + \dots + \Phi_1^{(n)} \right] \\ & + q_2 \left[ \Phi_2^{(1)} + \Phi_2^{(3)} + \Phi_2^{(4)} + \dots + \Phi_2^{(n)} \right] \\ & + q_3 \left[ \Phi_3^{(1)} + \Phi_3^{(2)} + \Phi_3^{(4)} + \dots + \Phi_3^{(n)} \right] \\ & + \dots \\ & + q_n \left[ \Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)} + \Phi_n^{(3)} + \dots + \Phi_n^{(n-1)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (35)$$

Notemos que en la expresión anterior se ha dividido por 2, ya que los términos correspondientes a cada par  $i$  y  $j$  aparecen dos veces (con los roles de  $i$  y  $j$  intercambiados). Los términos entre corchetes que acompañan a cada carga  $q_k$  tienen una interpretación muy simple: corresponden al potencial eléctrico total ejercido por el resto del sistema (formado por todas las cargas excepto

$q_k$ ) el cual llamaremos  $\Phi_k$ , en la posición  $P_k$  ocupada por dicha partícula. De esta forma la energía (35) puede finalmente escribirse como

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \Phi_k. \quad (36)$$

La generalización de la ecuación (36) válida para distribuciones continuas de carga es

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_v \Phi \, dv, \quad (37)$$

donde ahora  $\Phi$  es simplemente el potencial absoluto en cada punto del espacio.

La energía electrostática también puede expresarse en función de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  que llenan todo el espacio (los cuales están producidos por la distribución de carga  $\rho_v$ ). Tomando en cuenta que  $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$ , la energía (37) es igual a

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi (\nabla \cdot \mathbf{D}) \, dv. \quad (38)$$

Usando la identidad (123) de la unidad 1 podemos escribir que  $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi + \Phi (\nabla \cdot \mathbf{D})$ . Luego, teniendo en cuenta la ecuación (6), vemos que (38) puede volver a escribirse como

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) \, dv. \quad (39)$$

El teorema de la divergencia nos permite reescribir el segundo término del lado derecho lo que conduce a

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{2} \oint_S (\Phi \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (40)$$

donde  $S$  es la superficie que envuelve a  $V$ .

Si extendemos la región de integración a todo el espacio y la densidad de carga está acotada, la integral de superficie en la ecuación (40) convergerá a cero. Para demostrar esta afirmación, consideremos que  $S$  es la superficie de una esfera de radio  $r$  para la cual, luego de calcular la integral, tomaremos el límite  $r \rightarrow \infty$ . A grandes distancias respecto al tamaño característico de la distribución de carga, los campos se comportan como  $\Phi \propto 1/r$  y  $|\mathbf{D}| \propto 1/r^2$  (ver más adelante sección **Desarrollo multipolar del potencial eléctrico**). De esta forma el integrando decaerá con la distancia como  $|\Phi \mathbf{D}| \propto 1/r^3$ , mientras que la superficie de integración crecerá como  $S \propto r^2$ . El resultado neto es que la integral de superficie decae como  $1/r$  tendiendo a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . En definitiva, la energía electrostática se escribirá como

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv. \quad (41)$$

La expresión anterior sugiere que la energía electrostática está contenida en el campo y distribuida por todo el espacio con una densidad volumétrica

$$u_e = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}). \quad (42)$$

Esta es una nueva interpretación de la expresión (41) pues, como vimos anteriormente, las ecuaciones (36) y (37) indican que la energía está asociada a las posiciones que ocupan las cargas (o las densidades) en el espacio.

Finalmente, notemos que hay una diferencia importante entre las expresiones (36) y (41). Para un conjunto de cargas discretas, la primera ecuación muestra que la energía electrostática puede ser negativa. Esto es lógico ya que por ejemplo, al ensamblar dos cargas de diferente signo, el trabajo realizado por el agente externo es negativo. Sin embargo, notemos que la densidad de energía (42) nunca puede ser negativa: como  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , la densidad es igual a  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 \geq 0$ . De esta forma la integral (41) nunca puede dar un resultado negativo. Esta aparente contradicción tiene su origen en que las expresiones anteriores para distribuciones de cargas discretas, no tienen en cuenta la denominada **autoenergía**, la energía necesaria para ensamblar las cargas, mientras que las expresiones válidas para distribuciones continuas sí la tienen.

Para ilustrar el concepto de autoenergía, consideremos un par de partículas puntuales con cargas  $q_1$  y  $q_2$  las cuales están situadas en el vacío en las posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente. Tomando en cuenta que la densidad de carga del sistema es  $\rho_v = q_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + q_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ , el campo eléctrico dado por (9) en  $\mathbf{r}$  será

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ q_1 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + q_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right]. \quad (43)$$

La densidad de energía (42) para este campo es

$$u_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \left[ \frac{q_1^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^4} + 2q_1q_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right], \quad (44)$$

donde claramente los dos primeros términos corresponden a la autoenergía de ambas cargas. Integrando en todo el espacio el tercer término obtenemos (ver referencia [4], página 42)

$$U'_e = \frac{q_1q_2}{16\pi^2\epsilon_0} \int_V \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right] dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (45)$$

energía que es idéntica a (32). Aunque para un mismo sistema las ecuaciones (36) y (41) difieren en el término de autoenergía, ambas expresiones pueden usarse para resolver la mayoría de los problemas prácticos.

## 2.5. Fuerzas electrostáticas (opcional)

En esta sección determinaremos cómo calcular, a partir de las expresiones de energía obtenidas anteriormente, las fuerzas que actúan en un sistema estático formado por materiales conductores y dieléctricos. Usaremos el conocido **método del trabajo virtual**. Consideraremos dos casos.

Caso A: sistema de conductores aislados. El primer caso consiste en suponer que los conductores están aislados y por lo tanto poseen una cantidad fija de carga libre (por ejemplo, esto se puede lograr si luego de cargarlos con una batería esta se desconecta). Ya que el sistema está en reposo, cada uno de los elementos que lo conforman (conductores o dieléctricos) tendrá aplicada una fuerza neta igual a cero,  $\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F} = 0$ , donde  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  es la fuerza mecánica que equilibra la fuerza eléctrica  $\mathbf{F}$ . Si imaginamos un **desplazamiento virtual**  $d\mathbf{l}$ , el cambio de energía electrostática del sistema sería

$$dU_e = W_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (46)$$

Ya que el cambio diferencial del campo escalar en la dirección de desplazamiento es

$$dU_e = \frac{\partial U_e}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial U_e}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial U_e}{\partial u_3} du_3 = \nabla U_e \cdot d\mathbf{l}, \quad (47)$$

entonces la fuerza que experimenta el objeto puede calcularse como

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U_e} \quad (\text{conductores aislados}). \quad (48)$$

En otras palabras, las componentes de la fuerza serán

$$F_1 = -\frac{\partial U_e}{\partial u_1} \quad F_2 = -\frac{\partial U_e}{\partial u_2} \quad F_3 = -\frac{\partial U_e}{\partial u_3}. \quad (49)$$

Caso B: sistema de conductores a potenciales constantes. Supongamos ahora que todos los conductores están conectados permanentemente a fuentes de tensión. En este caso cualquier desplazamiento virtual estará acompañado de cambios en las cargas acumuladas en cada uno de los conductores. La variación de energía electrostática del sistema será

$$dU_e = W_{\text{ext}} + W_{\text{fue}}, \quad (50)$$

donde  $W_{\text{fue}}$  es el trabajo realizado por las fuentes de tensión para mantener el potencial constante en cada conductor. El trabajo realizado por el agente externo nuevamente puede escribirse como

$$W_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (51)$$

mientras que

$$W_{\text{fue}} = \sum_{k=1}^N \Phi_k dQ_k, \quad (52)$$

donde  $dQ_k$  es la variación diferencial de la carga en el conductor  $k$ -ésimo. Por otro lado, de acuerdo a la ecuación (36), el cambio diferencial en la energía electrostática del sistema debido a un cambio en el estado de carga de los conductores, también se puede expresar como

$$dU_e = U_{e(\text{final})} - U_{e(\text{inicial})} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k (Q_k + dQ_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k Q_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k dQ_k. \quad (53)$$

De esta última ecuación vemos que  $2dU_e = W_{\text{fue}}$  y por lo tanto, a partir de (50) y (51), podemos deducir que

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -W_{\text{ext}} = W_{\text{fue}} - dU_e = dU_e = \nabla U_e \cdot d\mathbf{l}, \quad (54)$$

o

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla U_e} \quad (\text{conductores a potenciales fijos}). \quad (55)$$

En conclusión, si se dispone de una expresión de la energía electrostática de un sistema de conductores y dieléctricos en función de las coordenadas que definen sus posiciones, es posible determinar las fuerzas que actúan en cada uno de los elementos que lo conforman. De acuerdo a si los conductores están aislados o a un potencial fijo, se deberán usar las expresiones (48) y (55) respectivamente.

Un ejemplo típico consiste en calcular la fuerza sobre uno de los conductores de un capacitor de placas paralelas con dieléctrico de aire. Supongamos que ambas placas tienen área  $A$ , están situadas en los planos  $x = l$  y  $x = 0$ , donde  $l$  es la distancia de separación entre ellas, y son despreciados los efectos de borde. Si el dispositivo fue cargado con una fuente de tensión  $V$  y luego esta fue desconectada entonces, de acuerdo a la ecuación (36), la energía acumulada en el capacitor puede escribirse como

$$U_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} QE_x l, \quad (56)$$

donde hemos considerado que el potencial  $V = E_x l$ . Como  $Q$  y  $E_x$  son independientes de  $l$ , usando la expresión (48) podemos calcular la fuerza como

$$F_x = -\frac{\partial U_e}{\partial l} = -\frac{1}{2}QE_x = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2l^2}, \quad (57)$$

donde en el último paso hemos tomado en cuenta que la carga acumulada es  $Q = CV$  y la capacitancia es  $C = \epsilon_0 A/l$ . Por otro lado, si el capacitor esta conectado en forma permanente a la fuente de tensión, entonces para calcular la fuerza debemos usar la ecuación (55). En este caso es conveniente escribir la energía como

$$U_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2l}. \quad (58)$$

Finalmente diferenciando respecto a  $l$  obtenemos la fuerza deseada

$$F_x = \frac{\partial U_e}{\partial l} = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2l^2}. \quad (59)$$

Notemos que, como es lógico, ambas formas de calcular la fuerza conducen al mismo resultado.

## 2.6. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Hasta el momento hemos analizado algunas metodologías que permiten resolver diferentes problemas electrostáticos. En todos estos casos, cantidades como el campos eléctrico, el potencial escalar o la energía, fueron determinadas a partir de la distribución de carga en el sistema. Sin embargo, si esta función es desconocida, es necesario recurrir a otra estrategia. La idea ahora consistirá en formular el problema electrostático como un **problema de valores de frontera**.

Consideremos la forma diferencial de la ley de Gauss para un medio dieléctrico

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v. \quad (60)$$

Ya que el campo eléctrico en un problema electrostático está dado por (6), podemos escribir para el potencial eléctrico la siguiente ecuación diferencial de segundo orden que es conocida como la **ecuación de Poisson**

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = \rho_v. \quad (61)$$

En el caso particular de que  $\epsilon$  sea una constante, esta ecuación tomará la forma

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}}. \quad (\text{ecuación de Poisson}) \quad (62)$$

Su solución para el espacio vacío (o para una región con permitividad constante  $\epsilon$ ) ya la hemos obtenido anteriormente y está dada por (12). Si, por otro lado, no existen cargas libres en la región considerada, la expresión anterior se convierte en la **ecuación de Laplace**

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0}. \quad (\text{ecuación de Laplace}) \quad (63)$$

La ecuación de Laplace o de Poisson junto con las condiciones de frontera adecuadas para el potencial escalar, constituyen la formulación de un problema de valores de frontera. Además, como estas ecuaciones son lineales, si poseen  $n$  soluciones  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ , entonces una combinación lineal de estas también será un solución válida:  $\Phi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots + c_n \Phi_n$  (para la

ecuación de Poisson, cada una de estas soluciones corresponderá a una distribución de cargas particular).

Nuevamente tomemos como ejemplo el par de conductores coaxiales de la figura 3 (b). Supondremos que la fuente de tensión continua mantiene una diferencia de potencial  $V$ . Usando coordenadas circulares cilíndricas y considerando la simetría del problema, podemos deducir que el potencial escalar depende sólo de la variable  $\rho$ . Las condiciones de frontera son

$$\Phi(b) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(a) = V \quad (\text{condiciones de frontera}), \quad (64)$$

donde hemos supuesto que el conductor exterior está conectado al potencial de referencia 0 (tierra). Para este caso particular la ecuación de Laplace (63) se puede escribir como

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) = 0. \quad (65)$$

Una primera integración de esta expresión conduce a  $\rho (d\Phi/d\rho) = C_1$ , mientras que una segunda integración a

$$\Phi(\rho) = C_1 \ln(\rho) + C_2, \quad (66)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Si aplicamos la condición de frontera para el conductor exterior,  $\Phi(b) = 0 = C_1 \ln(b) + C_2$ , podemos obtener una relación entre ambas constantes,  $C_2 = -C_1 \ln(b)$ , que permite escribir la función potencial como

$$\Phi(\rho) = C_1 \ln(\rho) - C_1 \ln(b) = C_1 \ln\left(\frac{\rho}{b}\right). \quad (67)$$

Luego, aplicando la segunda condición de frontera se deduce que  $C_1 = -V/\ln(b/a)$ , obteniéndose finalmente la solución

$$\Phi(\rho) = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right). \quad (68)$$

Podemos comprobar que esta función satisface ambas condiciones de frontera (64). A partir de este potencial es posible obtener más información. De hecho, usando la ecuación (6) podemos determinar el campo eléctrico entre ambos conductores

$$\mathbf{E}(\rho) = -\nabla\Phi(\rho) = -\mathbf{a}_\rho \frac{d\Phi}{d\rho} = \mathbf{a}_\rho \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho}. \quad (69)$$

Considerando las condiciones de frontera para el desplazamiento eléctrico, la densidad de carga en la superficie del conductor interior es

$$\rho_{s(\text{interior})} = D_n = \epsilon E_\rho \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{a}, \quad (70)$$

mientras que en la superficie de adentro del conductor exterior

$$\rho_{s(\text{exterior})} = -D_n = -\epsilon E_\rho \Big|_{\rho=b} = -\frac{\epsilon V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{b}. \quad (71)$$

Aunque ambas densidades son diferentes, integrando para una longitud  $l$  podemos determinar la carga en el conductor interior

$$\rho_{s(\text{interior})}(2\pi a l) = \frac{2\pi\epsilon l V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = q, \quad (72)$$

la cual tiene la misma magnitud pero diferente signo que la carga en el conductor exterior

$$\rho_{s(\text{exterior})}(2\pi bl) = -\frac{2\pi\epsilon lV}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -q. \quad (73)$$

Finalmente, la capacitancia por unidad de longitud puede calcularse a partir de su definición

$$\frac{C}{l} = \frac{q}{Vl} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad (74)$$

expresión que es igual a (29).

## 2.7. Teorema de unicidad

El **teorema de unicidad** nos dice que, una solución de la ecuación de Poisson o de la ecuación de Laplace es única dentro de un volumen  $V$  limitado por la superficie  $S$ , si las condiciones de frontera sobre  $S$  corresponden a alguno de estos tres tipos:

- **Condición de Dirichlet.** El potencial se especifica sobre toda la superficie:

$$\Phi_s(u_1, u_2, u_3). \quad (75)$$

- **Condición de Neumann.** La derivada normal del potencial (campo eléctrico) se especifica sobre toda la superficie:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_s. \quad (76)$$

- **Condición mixtas.** La condición de frontera de Dirichlet se especifica para una fracción de  $S$  y para el resto de la superficie se especifica la condiciones de frontera de Neumann.

Para demostrarlo suponemos que hay dos soluciones diferentes,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , que satisfacen la ecuación diferencial correspondiente (ya sea de Poisson o de Laplace) en  $V$  y además están sujetas a las mismas condiciones de frontera, ya sea de Dirichlet, Neumann o mixtas. Como hemos visto en otras demostraciones, la idea es llegar a un absurdo. Construimos entonces un nuevo campo escalar,  $h = \Phi_1 - \Phi_2$ , el cual debe satisfacer la ecuación de Laplace en  $V$

$$\nabla^2 h = 0. \quad (77)$$

Considerando ahora la ecuación anterior, la primera identidad de Green

$$\oint_S f \nabla g \cdot ds = \int_V [f(\nabla^2 g) + (\nabla g) \cdot (\nabla f)] dv, \quad (78)$$

y tomando  $f = g = h$ , obtenemos

$$\oint_S h \frac{\partial h}{\partial n} ds = \int_V |\nabla h|^2 dv. \quad (79)$$

Notemos ahora que como  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  satisfacen las mismas condiciones de frontera, entonces  $h = 0$  (condición de Dirichlet) o  $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$  (condición de Neumann) sobre toda la superficie  $S$ , o alguna de estas dos condiciones se satisface en cada uno de los puntos de  $S$  (condición mixta). De esta forma el lado izquierdo de la ecuación anterior siempre es cero. Como su integrando es igual a  $|\nabla h|^2 \geq 0$ , entonces se deduce que  $h = \text{constante}$  en  $V$ . En otras palabras,  $\Phi_1 = \Phi_2 + \text{constante}$  y por lo tanto la solución es única (salvo una constante aditiva).

## 2.8. Problemas con valores de frontera

En la sección 2.6 se describió cómo calcular el potencial eléctrico en un problema unidimensional (el potencial en el interior del cable coaxial), para el cual la solución de la ecuación de Laplace puede obtenerse por integración directa. En general, se presentan situaciones más complicadas que esta en las cuales no existen simetrías que permitan disminuir la dimensión del problema. En esta sección describiremos cómo determinar la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones usando el **método de separación de variables**.

Comencemos considerando la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} = 0. \quad (80)$$

El método de separación de variables consiste en suponer que la solución de esta ecuación diferencial puede escribirse como  $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ , es decir como el producto de dos funciones  $X(x)$  e  $Y(y)$  de una sola variable. Por lo tanto, la ecuación de Laplace se puede reescribir como

$$X''Y + XY'' = 0, \quad (81)$$

donde los apóstrofes denotan la diferenciación respecto a la variable correspondiente. La ecuación anterior se puede reescribir nuevamente como

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}. \quad (82)$$

Esta expresión es correcta para todo  $x$  e  $y$  si y sólo si cada uno de los miembros es una constante

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad \text{y} \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad (83)$$

donde  $k_x^2 + k_y^2 = 0$  o  $k_y = \pm jk_x$ , lo que implica que si una constante es real la otra debe ser imaginaria. De esta forma las ecuaciones que hay que resolver son

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad (84)$$

y

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0. \quad (85)$$

Como estas son ecuaciones diferenciales unidimensionales para las cuales siempre existe una solución, entonces se concluye que con el método de separación de variables se obtiene una solución válida de la ecuación de Laplace bidimensional.

Supongamos ahora que elegimos  $k_x = k$ , donde  $k$  toma un valor real. Como señalamos anteriormente, esto implica que  $k_y = \pm jk$  toma un valor imaginario puro. Es fácil ver que las soluciones para la ecuación diferencial (84) serán funciones senoidales y cosenoidales, mientras que para (85) serán funciones exponenciales con exponente real (ver un detalle de esta discusión en la página 260 de la referencia [1]). Podemos escribir entonces la solución general como

$$\Phi(x, y) = [C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)] (C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}), \quad (86)$$

donde  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  son constantes reales. Por otro lado, si hubiésemos supuesto que  $k_y = k$  es real, entonces  $k_x = \pm jk$  toma un valor imaginario puro y la solución sería

$$\Phi(x, y) = (C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}) [C_3 \cos(ky) + C_4 \sin(ky)]. \quad (87)$$

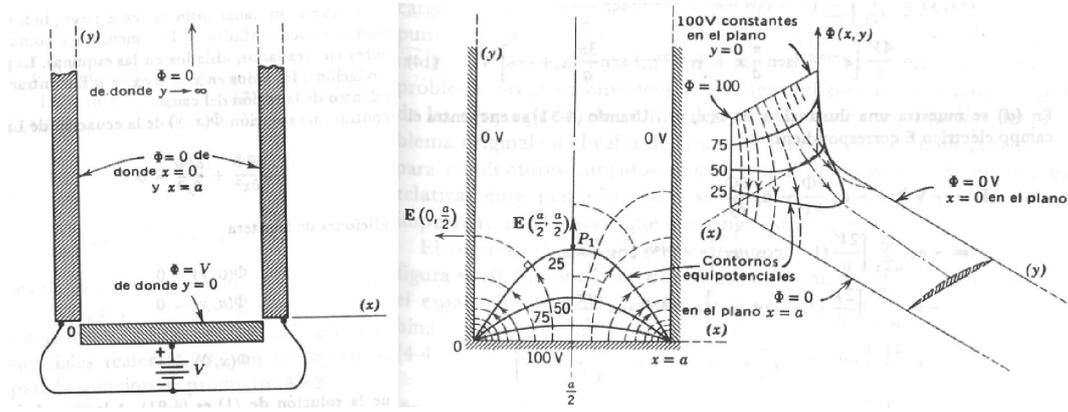


Figura 4: (a) [Izquierda] Canal bidimensional con paredes conductoras aisladas que están puestas a diferentes potenciales. (b) [derecha] Contornos equipotenciales y líneas de flujo del campo eléctrico para un problema particular.

Al aplicar un conjunto de condiciones de frontera, es posible determinar cuál de estas dos soluciones es la más adecuada (o quizás una suma de ambas) y también calcular el valor que toman las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $k$ .

Consideremos el siguiente ejemplo. La figura 4 (a) muestra un corte transversal de un canal lleno de aire cuyas paredes conductoras están aisladas y puestas a diferentes potenciales. El canal tiene un espesor  $a$  en la dirección de  $x$ , es seminfinito en la dirección de  $y$  e infinito en la dirección de  $z$  (por esta última característica se puede tratar como un problema bidimensional). Las condiciones de frontera de este problema son

$$\Phi(0, y) = 0 \quad \text{con } y > 0 \quad (88)$$

$$\Phi(a, y) = 0 \quad \text{con } y > 0 \quad (89)$$

$$\Phi(x, \infty) = 0 \quad \text{con } x \in [0, a] \quad (90)$$

$$\Phi(x, 0) = V \quad \text{con } x \in [0, a]. \quad (91)$$

Debido a la condición de frontera (90), que indica que el potencial en el límite  $y \rightarrow \infty$  debe ser cero, la única solución posible es del tipo (86). Si aplicamos la primera condición de frontera (88) es posible determinar que  $C_1 = 0$ . La función potencial quedará

$$\Phi(x, y) = C_2 \text{sen}(kx) (C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}). \quad (92)$$

La segunda condición (89) se satisface tomando  $k = m\pi/a$ , con el valor entero  $m \geq 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ),

$$\Phi(x, y) = C_2 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) [C_3 e^{(m\pi/a)y} + C_4 e^{-(m\pi/a)y}]. \quad (93)$$

Luego, la tercera condición de frontera (90) se satisface sólo si  $C_3 = 0$

$$\Phi(x, y) = C_2 C_4 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-(m\pi/a)y}. \quad (94)$$

Por último, observemos que la condición de frontera (91) es imposible de satisfacer con un función como la anterior. Para encontrar una solución adecuada, se prueba con una combinación lineal de funciones de este tipo, lo que se conoce como **serie de Fourier**. Es decir, se propone que el potencial sea igual a

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-(m\pi/a)y}. \quad (95)$$

Para obtener los valores de los coeficientes  $A_m$  que satisfacen la condición de frontera (91), consideremos las siguientes identidades

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (96)$$

$$\int_0^a \left[\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right]^2 dx = \frac{a}{2} \quad (97)$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)], \quad (98)$$

donde tanto  $m$  como  $n$  toman valores enteros mayores que cero. Las identidades (96) y (97) expresan la propiedad de ortogonalidad entre las funciones de Fourier. Si se aplica la condición de contorno (91) a la serie (95) se obtiene

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad \text{para } x \in [0, a]. \quad (99)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por  $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ , integrando la variable  $x$  en el intervalo  $[0, a]$  y usando las identidades (96-98), podemos deducir una expresión que permite calcular cada uno de los coeficientes de la suma (95)

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a V \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{2V}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)]. \quad (100)$$

De esta forma la solución para nuestro problema será

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2V}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-(m\pi/a)y}. \quad (101)$$

La figura 4 (b) muestra los contornos equipotenciales y la líneas de flujo del campo eléctrico para un canal con  $V = 100$  [V].

## 2.9. Método de las imágenes

El **método de las imágenes** es una estrategia que, para algunos casos particulares, permite determinar el potencial electrostático de un sistema sin resolver directamente las ecuaciones de Poisson o de Laplace. Esencialmente, se hace uso del teorema de unicidad el cual asegura que la solución de cualquiera de estas ecuaciones es única, si cumple con las condiciones de frontera adecuadas (Dirichlet, Neumann o mixtas).

Supongamos que el potencial en alguna región del espacio tiene dos contribuciones

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) + \Phi_2(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_k} \frac{\sigma_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds'_k, \quad (102)$$

donde  $\Phi_1(\mathbf{r})$  es una función conocida o fácil de calcular y  $\Phi_2(\mathbf{r})$  representa el potencial debido a las distribuciones de carga que yacen sobre las superficies de  $N$  conductores. El método de las imágenes consiste en encontrar (en principio intuitivamente) una distribución de cargas que reproduzca el potencial  $\Phi_2(\mathbf{r})$  en la misma región del espacio y sobre las superficies de los conductores, de tal forma que no sea necesario calcular las integrales de superficie dadas en (102). Estas cargas se denominan **cargas virtuales o imágenes**.

Un ejemplo muy sencillo consiste en encontrar, para una esfera conductora de radio  $a$  centrada en el origen y que está conectada a una fuente de tensión  $V$ , la carga imagen que reproduzca el mismo potencial para la región del espacio definida por  $r \geq a$ . Como hemos visto anteriormente, la forma usual de resolver este problema es solucionar la ecuación de Laplace con las condiciones de frontera adecuadas. Por la simetría esférica del problema podemos escribir que

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (\text{Laplace}) \quad \Phi(a) = V \quad \text{y} \quad \Phi(\infty) = 0 \quad (\text{cond. de frontera}). \quad (103)$$

Por integración directa se puede demostrar que

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{aV}{r}. \quad (104)$$

Este potencial es idéntico al producido por una carga puntual  $q$  situada en el origen de coordenadas (resultado que ya habíamos obtenido anteriormente) que tiene el valor particular  $q = 4\pi\epsilon_0 aV$ ,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\epsilon_0 aV)}{r} = \frac{aV}{r}. \quad (105)$$

Esta es la carga imagen que reproduce las condiciones de frontera y el potencial de la esfera para  $r \geq a$ . Notemos que la analogía sólo es para esta región, ya que para  $r < a$  el potencial dentro de la esfera es constante e igual a  $V$ , resultado que no concuerda con la predicción dada por la expresión (105).

El sistema anterior sirve también para ejemplificar el problema inverso: una carga centrada en el origen puede reemplazarse por un casquete conductor esférico que esté mantenido por una fuente externa a un potencial constante. Primero notemos que las superficies equipotenciales de la carga puntual son superficies esféricas. Si el potencial para  $r = a$  es  $\Phi(a) = \Phi_0$ , entonces el problema electrostático no cambiará si rodeamos la carga con un casquete esférico conductor del mismo radio y lo conectamos a una fuente de tensión  $V = \Phi_0$ . Aunque finalmente retiremos la carga situada en el origen, el potencial para  $r \geq a$  no cambiará pues pasará a ser mantenido por el conductor esférico. En general, la elección de las cargas imágenes siempre está guiada por el conocimiento de la forma que tienen las superficies equipotenciales de distribuciones conocidas de cargas.

Consideremos un ejemplo más. Supongamos que en el vacío tenemos una carga  $q$  situada en  $x = d$  e  $y = z = 0$ , y otra carga  $-q$  situada en  $x = -d$  e  $y = z = 0$ . El potencial de este sistema en coordenadas cartesianas es

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(d-x)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(d+x)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (106)$$

Notemos que para el plano  $x = 0$  dicho potencial es  $\Phi(0, y, z) = 0$ . Por lo tanto, para  $x \geq 0$ , el campo (106) equivale al de un sistema formado por una una carga puntual  $q$  situada en  $x = d$  e  $y = z = 0$ , que está frente a un plano conductor infinito localizado en  $x = 0$  y que se encuentra conectado a tierra (en este caso  $-q$  pasaría a ser una carga imagen). Esta analogía nos permite calcular diversas cantidades. De hecho, la densidad de carga en el conductor es simplemente

$$\rho_s = D_n|_{x=0} = \epsilon_0 E_n|_{x=0} = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi [d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (107)$$

Notar que en el plano conductor se induce una densidad superficial de carga negativa, que es constante sobre círculos concéntricos centrados en el origen. La fuerza con la cual el conductor atrae a la carga  $q$  también es fácil de obtener, calculando la fuerza de Coulomb que le aplica la carga imagen  $-q$ . El par opuesto es la fuerza que experimenta el conductor.

## 2.10. Método de los cuadrados curvilíneos (opcional)

Existen diferentes métodos prácticos que permiten calcular aproximadamente la capacitancia de sistemas bidimensionales. En esta sección describimos el llamado **método de los cuadrados curvilíneos**.

Consideremos a un sistema formado por conductores cargados que poseen una longitud infinita en la dirección  $z$ , pero cuya sección transversal es uniforme (en la práctica basta con que la longitud a lo largo de  $z$  sea mucho mayor que el ancho de la sección transversal). Como vimos anteriormente en la sección 2.8, estos sistemas pueden considerarse como bidimensionales. La figura 5 muestra dos ejemplos de este tipo.

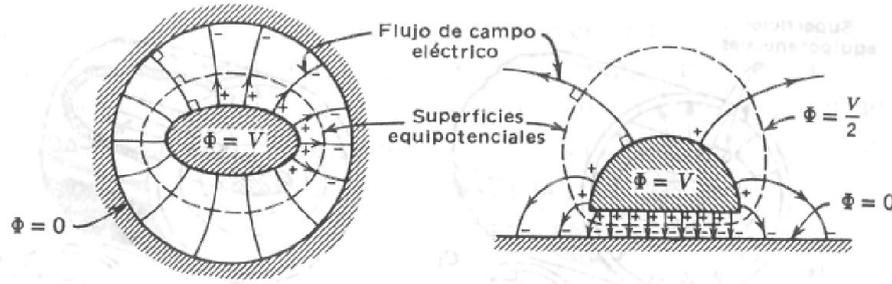


Figura 5: Sección transversal de dos sistemas de conductores en los cuales se han dibujado las superficies equipotenciales y las líneas de flujo del campo eléctrico.

En todos los casos, las superficies equipotenciales y las líneas de flujo del campo eléctrico se trazan de acuerdo a las siguientes reglas:

- 1) Las superficies de los conductores son equipotenciales entre las cuales se pueden construir otras superficies equipotenciales. Las formas de estas varían gradualmente al pasar de un conductor a otro.
- 2) Las líneas de campo eléctrico cortan en forma ortogonal estas superficies equipotenciales y forman los límites de los llamados tubos de flujo, los cuales contienen una cantidad fija de flujo en su interior.

Denominaremos **celdas de campo**, a los **cuadrados curvilíneos** que se forman por la intersección de dos líneas de campo y dos superficies equipotenciales (ver figura 5).

Supongamos entonces que tenemos un sistema bidimensional de conductores para el cual conocemos, al menos aproximadamente, la forma de las superficies equipotenciales y las líneas de flujo del campo eléctrico. La figura 6 muestra un ejemplo de dos conductores, donde el interior posee una carga  $q$  y el exterior una carga  $-q$ . Si se introducen (imaginariamente) láminas conductoras muy delgadas en cada equipotencial, el problema electrostático no cambiará en absoluto. Cada par de láminas formará un capacitor y el conjunto completo será equivalente a un circuito de capacitores conectados en serie [ver figura 6 (a)]. Tomando en cuenta que cada lámina tendrá inducidas cargas  $-q$  y  $q$  en cada una de sus caras, si la diferencia de potencial entre las superficies equipotenciales cercanas es constante e igual a  $V_0$ , entonces se deduce que todos los capacitores tendrán la misma capacitancia  $C_0 = q/V_0$ . Si hay  $n_s$  capacitores de este tipo en serie entre ambos conductores, entonces la capacidad total será

$$C = \frac{C_0}{n_s}. \quad (108)$$

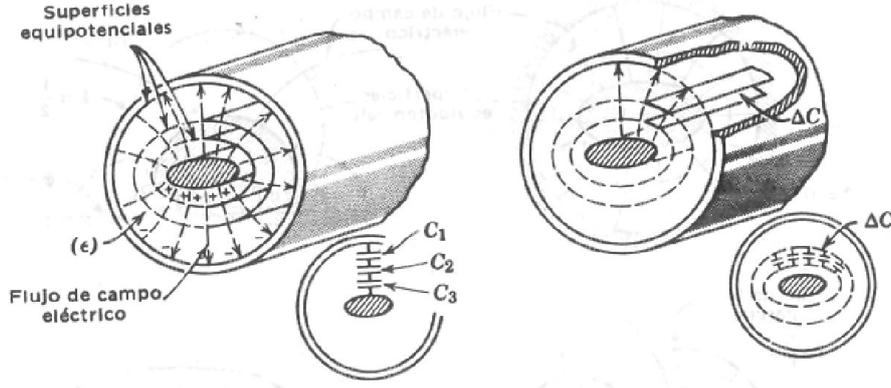


Figura 6: (a) [Izquierda] Equivalencia entre las superficies equipotenciales y un conjunto de capacitores conectados en serie. (b) [Derecha] Equivalencia entre las celdas de campo entre dos equipotenciales y un conjunto de capacitores conectados en paralelo.

Por otro lado, como muestra la figura 6 (b), a cada uno de estos capacitores  $C_0$  es posible dividirlo en  $n_p$  capacitores conectados en paralelos, estando cada uno de ellos asociado a una celda de campo. Si todos estos pequeños capacitores imaginarios tienen las mismas cargas inducidas  $\Delta q$  y  $-\Delta q$ , entonces todos poseerán la misma capacitancia  $\Delta C$ . Como están en paralelo tendremos que  $C_0 = n_p \Delta C$  y

$$C = \frac{n_p}{n_s} \Delta C. \quad (109)$$

Para determinar el valor de capacitancia de una celda, razonamos como sigue.  $\Delta C = \Delta q / |V_0|$ , donde la caída de potencial  $V_0 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx -E_{pr} \Delta h_{pr}$ . Aquí  $E_{pr}$  es el módulo del campo eléctrico promedio en la celda, la cual tiene una altura promedio  $\Delta h_{prom}$  (esta altura se mide en la dirección de las líneas de campo eléctrico). Para una celda pegada a la superficie de uno de los conductores tenemos que  $E_n = D_n / \epsilon = \rho_s / \epsilon$ , donde  $\rho_s \approx \Delta q / \Delta s_{pr}$ , siendo  $\Delta s_{pr}$  el área promedio de la sección transversal de la celda. Si esta celda tiene longitud  $l$  (a lo largo del eje de simetría  $z$ ) y ancho promedio  $\Delta w_{pr}$  (a lo largo de un equipotencial), entonces  $\Delta s_{pr} = l \Delta w_{pr}$  y el campo promedio se puede escribir como  $E_{pr} \approx E_n = \rho_s / \epsilon \approx \Delta q / (\epsilon l \Delta w_{pr})$ . Por lo tanto tenemos que

$$\Delta C = \frac{\Delta q}{|V_0|} \approx \frac{\Delta q}{E_{pr} \Delta h_{pr}} \approx \frac{\Delta q}{\frac{\Delta q}{\epsilon l \Delta w_{pr}} \Delta h_{pr}} = \epsilon l \frac{\Delta w_{pr}}{\Delta h_{pr}}, \quad (110)$$

que da una capacitancia por unidad de longitud para una celda de campo de

$$\frac{\Delta C}{l} \approx \epsilon \frac{\Delta w_{pr}}{\Delta h_{pr}}. \quad (111)$$

Si las celdas se dibujan como cuadrados curvilíneos con  $\Delta w_{pr} = \Delta h_{pr}$  se tiene que

$$\frac{\Delta C}{l} \approx \epsilon. \quad (112)$$

Si en lugar de un dieléctrico hay vacío entre los conductores, entonces esta capacidad por metro de longitud tendrá un valor de  $\epsilon_0 = 8,84$  [pF/m] (podría ser también aire para el cual  $\epsilon \approx \epsilon_0$ ). En definitiva la capacidad por unidad de longitud de estos dos conductores será

$$\boxed{\frac{C}{l} \approx \epsilon \frac{n_p}{n_s}}. \quad (113)$$

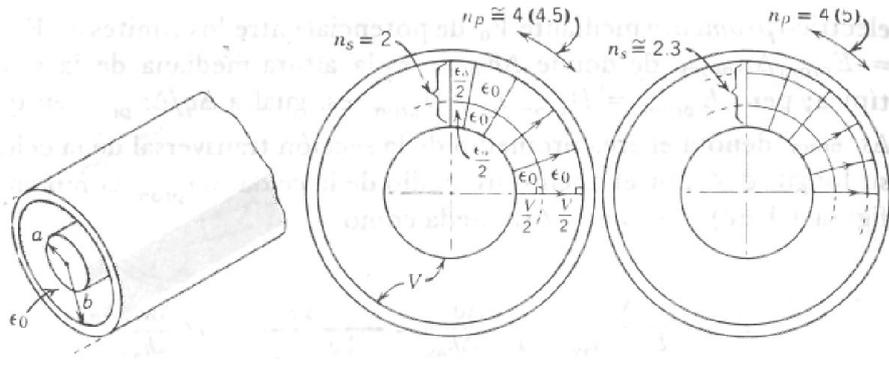


Figura 7: (a) [Izquierda] Condensador coaxial con  $b = 2a$ . (b) [Centro] Gráfica con los equipotenciales a intervalos fijos. (c) [Derecha] Gráfica con cinco tubos de flujo por cuadrante.

En la práctica, no es necesario que  $n_p$  y  $n_s$  sean números enteros ni que las celdas de campo sean cuadrados perfectos. El método, aunque aproximado, puede ser útil para calcular la capacitancia de sistemas para los cuales es difícil realizar un cálculo analítico exacto.

Como ejemplo, calculemos la capacitancia por unidad de longitud del par de conductores coaxiales de la figura 7 (a), para los cuales  $b = 2a$ . Si empíricamente se subdivide el espacio entre ambos conductores en dos intervalos de igual diferencia de potencial como en la figura 7 (b), entonces tendremos que  $n_s = 2$  y  $n_p \approx 4 \times (4,5) = 18$  (la figura sólo muestra uno de los cuatro cuadrantes del sistema). De esta forma la ecuación (113) predice que

$$\frac{C}{l} \approx (8,84 \times 10^{-12}) \frac{18}{2} = 79,56 \text{ [pF/m]}. \quad (114)$$

Por otro lado, si los campos se dibujan como en la figura 7 (c) fijando en cinco el número de tubos de flujo por cuadrante, entonces  $n_p = 4 \times 5 = 20$  y gráficamente se ve que  $n_s \approx 2,3$ . Esto da una capacitancia por unidad de longitud de

$$\frac{C}{l} \approx (8,84 \times 10^{-12}) \frac{20}{2,3} = 76,87 \text{ [pF/m]}. \quad (115)$$

Ambas estimaciones son muy similares y se aproximan mucho al valor exacto dado por la ecuación (29),

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi(8,84 \times 10^{-12})}{\ln 2} = 80,13 \text{ [pF/m]}. \quad (116)$$

## 2.11. Método iterativo (opcional)

Una técnica conocida como **método de elementos finitos** [8], permite resolver numéricamente problemas con valores de frontera. En esta sección describiremos cómo usar este método para encontrar una solución de la ecuación de Laplace bidimensional.

En coordenadas cartesianas el problema a resolver es

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad + \text{condiciones de contorno}. \quad (117)$$

La figura 8 muestra esquemáticamente la región del espacio dentro de la cual se desea obtener el potencial  $\Phi$ . Por simplicidad se ha elegido que la región sea cuadrada, aunque en general

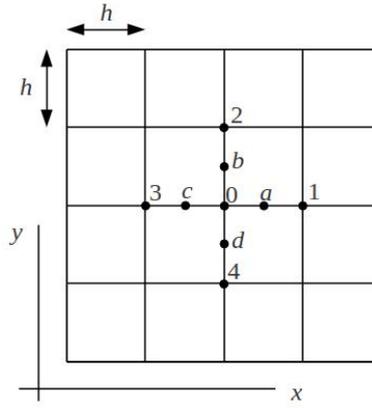


Figura 8: Discretización de la región de interés con una malla o grilla formada por celdas de tamaño  $h \times h$ .

podría tomar cualquier forma. Supondremos además que los valores del potencial en el contorno exterior son conocidos (condiciones de contorno tipo Dirichlet).

Comenzamos dividiendo el espacio con una malla o grilla formada por celdas de tamaño  $h \times h$  (ver figura 8). Para este espacio es posible discretizar la ecuación de Laplace. Primero observemos que las derivadas primera del potencial eléctrico respecto a  $x$  en los puntos  $a$  y  $c$  de la figura 8, pueden aproximarse como

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_a \approx \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{h}, \quad (118)$$

y

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_c \approx \frac{\Phi_0 - \Phi_3}{h}. \quad (119)$$

Aumentando la discretización de la región de interés, lo que equivale a tomar un valor de  $h$  más pequeño, se logra mejorar las aproximaciones anteriores. A continuación, la segunda derivada respecto a  $x$  en el punto 0 la podemos aproximar como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left( \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_c \right) \approx \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2}. \quad (120)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, podemos construir la derivada segunda respecto a  $y$  en el punto 0

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2}. \quad (121)$$

De esta forma la ecuación de Laplace nos queda

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4\Phi_0}{h^2} = 0, \quad (122)$$

aproximación que mejora conforme  $h \rightarrow 0$ . La expresión anterior nos dice que, para satisfacer la ecuación de Laplace, el potencial en 0 debe ser igual al promedio de los potenciales en los puntos vecinos

$$\boxed{\Phi_0 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{4}}. \quad (123)$$

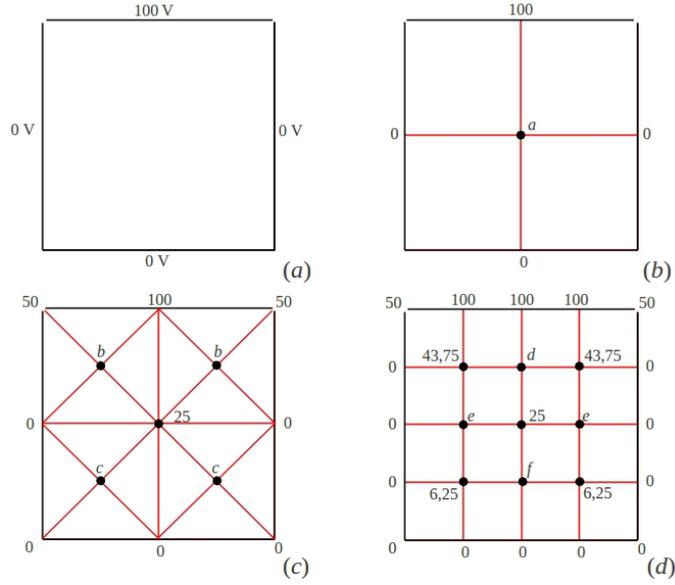


Figura 9: (a) Región cuadrada con las condiciones de contorno indicadas. Los paneles (b), (c) y (d) muestran los tres primeros pasos de iteración.

Para este problema, el método de elementos finitos consiste primero en subdividir la región de interés con una malla para la cual se conoce el potencial sólo en algunos puntos. Luego, usando la ecuación anterior en un proceso iterativo, se va aproximando cada vez mejor el potencial para el resto de los puntos de la malla.

Veamos un ejemplo. Consideremos la figura 9 (a) en la cual se muestran las condiciones de frontera de una región cuadrada: la arista superior se encuentra a 100 [V] y las restantes a tierra. El primer paso consiste en usar la ecuación (123) para determinar el potencial en el centro de esta región [ver figura 9 (b)]

$$\Phi_a = \frac{100 + 0 + 0 + 0}{4} = 25. \quad (124)$$

Una vez que determinamos el potencial en el centro, podemos aproximar el potencial en los puntos  $b$  y  $c$  que han sido marcados en la figura 9 (c). Notemos que para poder realizar este paso, se ha supuesto que los dos vértices superiores se encuentran a un potencial promedio de 50 V (el promedio entre 0 y 100 V). De esta forma usando la ecuación (123) obtenemos

$$\Phi_b = \frac{100 + 50 + 25 + 0}{4} = 43,75 \quad (125)$$

$$\Phi_c = \frac{25 + 0 + 0 + 0}{4} = 6,25. \quad (126)$$

Una iteración más permite aproximar el potencial en los puntos  $d$ ,  $e$  y  $f$  [ver figura 9 (d)]

$$\Phi_d = \frac{100 + 43,75 + 43,75 + 25}{4} = 53,125 \quad (127)$$

$$\Phi_e = \frac{43,75 + 25 + 6,25 + 0}{4} = 18,75 \quad (128)$$

$$\Phi_f = \frac{25 + 6,25 + 6,25 + 0}{4} = 9,375. \quad (129)$$

Una vez que se ha aproximado el potencial en todos los puntos interiores, se debe seguir iterando para corregir estos valores hasta que todos ellos no cambien más (en realidad, se deja de iterar cuando estos valores no cambian más dentro de un rango de tolerancia).

## 2.12. Desarrollo multipolar del potencial eléctrico

En esta sección consideraremos el **desarrollo multipolar del potencial eléctrico**, el cual permite aproximar el potencial debido a una densidad de carga localizada, en puntos muy alejados de dicha distribución.

Decimos que una densidad de carga está localizada, cuando es posible contenerla totalmente dentro de una esfera de radio finito  $R$  centrada en el origen. La distribución de carga de una molécula aislada es un ejemplo de ello. Sin embargo hay casos, como el de una densidad lineal de carga de dimensión infinita, para los cuales no es posible encontrar un  $R$  finito que permita encerrar a todo el sistema. Las aproximaciones que desarrollaremos a continuación no serán válidas para estos últimos problemas.

El potencial eléctrico para una distribución arbitraria de carga está dado por la ecuación (12) la cual reproducimos nuevamente aquí

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (130)$$

Recordemos que la figura 1 (a) representa las cantidades involucradas en esta expresión. Consideremos ahora la identidad

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \quad (131)$$

y la siguiente expansión de Taylor la cual es válida para  $x \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \left[ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \right]. \quad (132)$$

Usando (131), el desarrollo anterior y tomando  $x = -2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2$ , podemos escribir que

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right) + \frac{3}{8} \left( -2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right)^2 - \dots \right]. \quad (133)$$

Finalmente, si introducimos la ecuación anterior en el integrando de la expresión (130), obtenemos los primeros términos del desarrollo multipolar del potencial eléctrico

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho_v(\mathbf{r}') dv' + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{c_i c_j}{r^5} \int_{V'} \left( 3c'_i c'_j - \delta_{i,j} r'^2 \right) \rho_v(\mathbf{r}') dv' + \dots \right], \quad (134)$$

donde el último término por simplicidad ha sido escrito en coordenadas cartesianas con  $x = c_1$ ,  $y = c_2$ ,  $z = c_3$ ,  $x' = c'_1$ ,  $y' = c'_2$  y  $z' = c'_3$ , y  $\delta_{i,j}$  representa a la función delta de kronecker la cual está definida como

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Los primeros términos de (134) permiten aproximar el potencial en puntos muy alejados de la densidad de carga, formalmente para valores de  $|\mathbf{r}| \gg R \geq |\mathbf{r}'|$ , donde  $R$  recordemos que es el valor del radio de una esfera finita centrada en el origen que contiene a toda la distribución.

Analicemos ahora el significado físico de cada término en (134). Al primero se lo denomina **término monopolar** y, debido a que la integral de volumen de la densidad es igual a una carga neta  $Q$ , entonces podemos reescribirlo como

$$\Phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (135)$$

Notemos que el término monopolar representa el potencial debido a una carga  $Q$  centrada en el origen. El segundo es el **término dipolar**

$$\boxed{\Phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho_v(\mathbf{r}') dv' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}, \quad (136)$$

donde el momento dipolar generalizado  $\mathbf{p}$  se define como

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho_v(\mathbf{r}') dv'. \quad (137)$$

La ecuación (136) representa el potencial debido a un dipolo situado en el origen. Es fácil demostrar que si se hace un cambio de coordenadas dado por una traslación,  $\mathbf{r}' + \mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{r}''$  donde  $\mathbf{R}_0$  es un vector constante, entonces el momento dipolar no cambiará sólo si la carga neta de la distribución es cero,  $Q = 0$ . Por último el tercer término en la ecuación (134) es el **término cuadrupolar**

$$\boxed{\Phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{c_i c_j}{r^5} \int_V (3c'_i c'_j - \delta_{i,j} r'^2) \rho_v(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{c_i c_j}{r^5} \mathbf{Q}_{ij}}, \quad (138)$$

donde el tensor cuadrupolar se define como

$$\mathbf{Q}_{ij} = \int_V (3c'_i c'_j - \delta_{i,j} r'^2) \rho_v(\mathbf{r}') dv'. \quad (139)$$

En conclusión, si estamos muy alejados de una distribución de carga, el potencial eléctrico podrá aproximarse por la suma

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_M(\mathbf{r}) + \Phi_D(\mathbf{r}) + \Phi_Q(\mathbf{r}) + \dots \quad (140)$$

Ya que a medida que aumenta el orden de un término también aumenta la rapidez con la que cae su valor con la distancia (el término dipolar cae más rápido que el monopolar, el cuadrupolar cae más rápido que el dipolar, etc.), para puntos muy alejados de la distribución basta con aproximar el potencial con el término no nulo de menor orden. Por ejemplo, ya que una molécula como la del agua es neutra, su término monopolar será igual a cero. Considerando sólo la contribución del término dipolar (el cual es aproximadamente  $6,2 \times 10^{-30}$  [C.m]), podremos obtener una buena estimación del potencial a distancias mucho mayores que el radio medio de la molécula.

## 3. Campos magnéticos estáticos

### 3.1. Potencial vectorial magnético

Como hemos visto en la unidad anterior, tanto en el espacio vacío como dentro de los medios materiales, el campo magnético  $\mathbf{B}$  tiene divergencia nula,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Teniendo en cuenta esto y que la divergencia de un rotor siempre es cero, podemos definir un nuevo campo  $\mathbf{A}$  denominado **potencial vectorial magnético** a través de la siguiente ecuación

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}. \quad (141)$$

Notemos que esta igualdad sigue siendo válida ya sea que los campos sean estáticos o no.

Por otro lado, bajo condiciones estáticas, podemos determinar una expresión simple para calcular el potencial vectorial a partir de las densidades de corriente, las cuales constituyen las fuentes del campo magnético. Esto es equivalente a lo realizado en la sección 2.1, donde obtuvimos una expresión integral del potencial escalar eléctrico en función de las densidades de carga. Empecemos notando que si los campos no dependen del tiempo y la permeabilidad  $\mu$  es una constante, entonces la ley de Ampère (4) se escribe como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}. \quad (142)$$

Luego, sustituyendo (141) en la expresión anterior obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}. \quad (143)$$

Notemos ahora que usando la identidad  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (144)$$

De acuerdo al teorema de Helmholtz, un campo vectorial queda determinado en forma unívoca cuando su divergencia y su rotacional son dados en todo el espacio. Por lo tanto, para especificar correctamente el potencial vectorial, además de la ecuación (141) es necesario saber, o en este caso elegir, cuánto vale  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Como veremos en la unidad 9, hay más de una opción para escoger. Por simplicidad aquí supondremos que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  en todo el espacio, por lo que la ecuación (144) puede reescribirse como

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}}, \quad (145)$$

la cual es conocida como la **ecuación vectorial de Poisson**. Una solución integral en términos de las densidades de corriente se puede obtener si notamos que la ecuación anterior es equivalente, en coordenadas cartesianas, a las siguientes tres expresiones escalares

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x \quad \nabla^2 A_y = -\mu J_y \quad \nabla^2 A_z = -\mu J_z, \quad (146)$$

cada una de las cuales tiene la misma forma que la ecuación de Poisson (62). Por lo tanto, considerando que (12) es solución de esta última, una solución análoga para el potencial vectorial puede escribirse como

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'}, \quad (147)$$

donde cada una de las tres componentes son las soluciones de las ecuaciones (146).

### 3.2. Ley de Biot y Savart

Deduciremos ahora una expresión integral para el campo magnético  $\mathbf{B}$  en función de las densidades de corriente. Partiendo de (141) y (147) podemos escribir que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[ \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right]. \quad (148)$$

Notando que nabla opera sobre las variables sin primar, la expresión anterior se puede escribir como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv'. \quad (149)$$

Teniendo en cuenta la identidad (125) de la unidad 1,  $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$ , reescribimos el integrando como

$$\nabla \times \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \nabla \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'). \quad (150)$$

Ya que la densidad de corriente sólo depende de las variables primadas, el último término es cero. Entonces teniendo en cuenta la relación (10), la ecuación anterior puede escribirse como

$$\nabla \times \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (151)$$

De esta forma podemos reescribir (149) como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv', \quad (152)$$

expresión que se conoce con el nombre de **ley de Biot y Savart**. En el caso particular de una corriente lineal sólo debemos sustituir  $\mathbf{J}dv'$  por  $I d\mathbf{l}'$  [ver mas adelante ecuación (175)]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_l I(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (153)$$

donde  $I(\mathbf{r}')$  es la corriente que circula en la dirección de  $d\mathbf{l}'$ .

Veamos un ejemplo. La figura 10 muestra un alambre de longitud  $2L$  que conduce una corriente contante de magnitud  $I$ . Este conductor coincide con el eje  $z$  y está centrado en el origen de coordenadas. Determinaremos el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto  $P$  que está situado sobre el plano  $z = 0$  a una distancia  $\rho$  del origen. Observando la figura 10 (a), notemos primero que  $I d\mathbf{l}' = \mathbf{a}_z I dz'$ . Además, de la figura 10 (b), es posible deducir que

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{(\mathbf{a}_\rho \rho - \mathbf{a}_z z')}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}. \quad (154)$$

Entonces la ecuación (153) puede escribirse como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{\mathbf{a}_z \times (\mathbf{a}_\rho \rho - \mathbf{a}_z z')}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}} dz' = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I \rho}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}}, \quad (155)$$

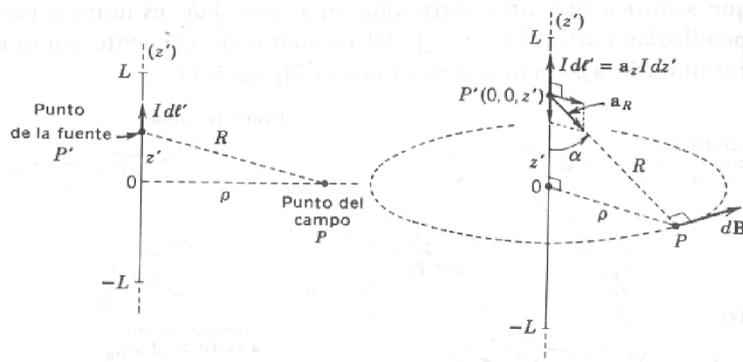


Figura 10: Alambre recto de longitud  $2L$  que conduce una corriente contante  $I$ . (a) [izquierda] Vista de perfil y (b) [derecha] vista en perspectiva.

donde hemos considerado que  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$  y  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$ . Haciendo una sustitución trigonométrica es posible integrar la expresión anterior (se deja como ejercicio para el alumno)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I \rho}{4\pi} \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}} \right] \Bigg|_{-L}^L = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I}{2\pi \rho} \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}}. \quad (156)$$

Por otro lado, si estamos muy próximos a este alambre ( $\rho \ll L$ ) o su longitud es infinita, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I}{2\pi \rho}, \quad (157)$$

la cual fue obtenida anteriormente usando la ley de Ampère.

### 3.3. Ley de fuerza de Ampère

Deducimos ahora una expresión denominada **ley de fuerza de Ampère**, que permite calcular la fuerza con que se atraen o se repelen dos espiras conductoras, cada una de las cuales conduce una corriente estacionaria. Esta es el análogo magnético de la ley de fuerza de Coulomb en electrostática.

La figura 11 muestra un esquema típico de este sistema. El origen de la fuerza entre estas dos espiras es muy simple: la corriente en la espira 2 genera un campo magnético que llena todo el espacio, el cual aplica una fuerza de Lorentz a los electrones que se están moviendo en la espira 1. Este mismo mecanismo es el responsable de que la espira 2 sienta una fuerza debida a la espira 1.

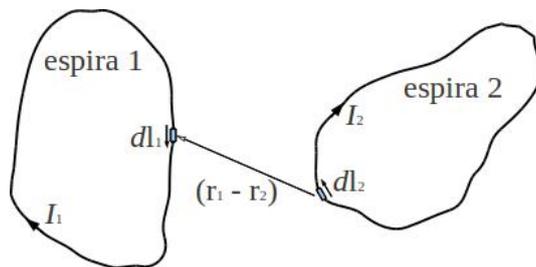


Figura 11: Esquema de dos espiras que conducen corrientes estacionarias.

Para calcular esta fuerza, comencemos escribiendo la ley de Lorentz para una cantidad diferencial de carga  $dq$  que se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  en un campo magnético  $\mathbf{B}$

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (158)$$

Supongamos ahora que, en un diferencial de tiempo  $dt$ , esta cantidad de carga pasa por una sección transversal de la espira 1, la cual conduce una corriente estacionaria  $I_1$ . Por lo tanto podemos escribir que  $dq = I_1 dt$ . Si esta carga se mueve a velocidad  $\mathbf{v}_1$  y en el tiempo  $dt$  se traslada (a lo largo del conductor 1) un elemento diferencial de longitud  $d\mathbf{l}_1$ , entonces podemos escribir que

$$dq \mathbf{v}_1 = I_1 dt \left( \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} \right) = I_1 d\mathbf{l}_1. \quad (159)$$

Usando la ecuación anterior podemos deducir la fuerza de Lorentz que afecta a este elemento diferencial de longitud

$$d\mathbf{F} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}. \quad (160)$$

Consideremos ahora que el elemento diferencial  $d\mathbf{l}_1$  se encuentra situado en el punto del espacio señalado por el vector de posición  $\mathbf{r}_1$ . De acuerdo a (153), el campo magnético en dicho punto producido por un elemento de corriente de la espira 2 localizado en  $\mathbf{r}_2$ , está dado por

$$d\mathbf{B}_1^{(2)} = \frac{\mu}{4\pi} I_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (161)$$

Por tanto la fuerza de Lorentz (160) se podrá reescribir como

$$d\mathbf{F}_1^{(2)} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_1^{(2)} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (162)$$

Integrando a lo largo de ambas espiras obtenemos la ley de fuerza de Ampère

$$\boxed{\mathbf{F}_1^{(2)} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}}. \quad (163)$$

A partir de la expresión anterior no es obvio que valga la tercera ley de Newton, la cual nos dice que  $\mathbf{F}_1^{(2)}$  y  $\mathbf{F}_2^{(1)}$  deben formar un par de fuerzas de acción y reacción. Para probar esto consideremos la identidad algebraica (113) de la unidad 1,  $\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$ , la cual nos permite reescribir (163) como

$$\mathbf{F}_1^{(2)} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \left\{ \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 [d\mathbf{l}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) [d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right\}. \quad (164)$$

La primera de estas integrales es nula pues, considerando nuevamente la relación (10), la podemos reescribir como

$$-\frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} d\mathbf{l}_2 \left[ d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla^1 \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \right] = - \oint_{l_2} d\mathbf{l}_2 \oint_{l_1} d \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) = 0, \quad (165)$$

ya que la integral a lo largo de  $l_1$  es cero (notemos que  $\nabla^1$  opera sólo sobre  $\mathbf{r}_1$ ). Por lo tanto, una expresión para la fuerza equivalente a (163) es

$$\boxed{\mathbf{F}_1^{(2)} = -\frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) [d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}}, \quad (166)$$

a partir de la cual, intercambiando los índices 1 por 2 y 2 por 1, podemos deducir fácilmente que se cumple  $\mathbf{F}_2^{(1)} = -\mathbf{F}_1^{(2)}$ . Curiosamente la fuerza diferencial (162) no satisface la tercera ley de Newton. Es la fuerza total dada por las integrales (163) o (166) la que cumple con esta ley.

Un ejemplo típico consiste en calcular la fuerza por unidad de longitud ejercida entre dos conductores rectilíneos infinitos paralelos que están separados por una distancia  $d$ . Es fácil demostrar (se deja como ejercicio para el alumno) que su magnitud es

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}. \quad (167)$$

Esta fuerza es atractiva (repulsiva) si las corrientes tienen el mismo (opuesto) sentido de circulación.

### 3.4. Energía magnética

En esta sección deduciremos una expresión de la energía almacenada en el campo magnético. Debido a que una demostración rigurosa es muy complicada [1, 2, 4], hemos optado por realizar primero una descripción cualitativa de cómo se debe proceder, para luego finalizar con algunos cálculos cuantitativos.

Consideremos entonces una espira que conduce una corriente estacionaria  $I$ . La idea consiste en subdividir este objeto en  $N$  espiras idénticas (donde  $N$  es un número muy grande), donde cada una de las cuales conduce una fracción equivalente de la corriente total,  $I/N$ , y que en un principio se sitúan en el infinito (esencialmente separadas una distancia infinita unas de otras). Entonces, el sistema se ensambla trayendo de a una espira por vez hasta su posición final. La suma de los trabajos realizados en este proceso equivale a la energía potencial magnética del sistema. Esta descripción es análoga a la empleada para determinar la energía electrostática de una distribución de cargas.

La diferencia estriba en que hay varias fuerzas involucradas. En primer lugar, como dedujimos en la sección anterior, existe una fuerza de Ampère la cual en nuestro caso particular siempre es atractiva (todas las espiras conducen la corriente en el mismo sentido). De esta forma, el trabajo efectuado por el agente externo es negativo. Por otro lado, al acercarse entre sí un par de espiras, cada una de ellas provoca un cambio de flujo magnético a través de la espira opuesta. De esta forma, es necesario tener en cuenta la ley de inducción de Faraday la cual nos dice que en este caso, se induce en cada espira un campo eléctrico no conservativo que se opone a la circulación de las corrientes existentes. Para mantenerlas estacionarias, un agente externo debe realizar un trabajo positivo (en este caso el agente externo está representado por una fuente de tensión en cada espira que compensa la fem inducida). En una situación más general, si se suman todas estas contribuciones se llega a la expresión (que damos sin demostrar)

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dv', \quad (168)$$

la energía de una distribución estacionaria de corriente  $\mathbf{J}$  que produce un potencial magnético  $\mathbf{A}$ . Esta es análoga a la ecuación (37), la energía de una distribución estática de cargas.

Si consideramos la ley de Ampère, la integral (168) se puede escribir como

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} \, dv'. \quad (169)$$

Luego, usando la identidad (124) de la unidad 1 podemos escribir que  $(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})$ . De esta forma la integral anterior se puede reescribir como

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})] \, dv' = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv' - \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}', \quad (170)$$

donde en la primera integral hemos considerado que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y en la segunda hemos usado el teorema de la divergencia. Procediendo como en la sección 2.4, si la densidad de corriente está acotada en el espacio al tomar el límite  $V \rightarrow \infty$  la integral de superficie anterior tenderá a cero (el integrando decaerá más rápido que  $1/r^2$ ) y la energía podrá escribirse simplemente como

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv'. \quad (171)$$

La ecuación anterior se puede interpretar diciendo que en cada volumen diferencial del espacio, habrá almacenada una densidad de energía magnética dada por

$$u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (172)$$

### 3.5. Desarrollo multipolar del potencial vectorial magnético

Como vimos en la sección 2.12, es posible encontrar un desarrollo en multipolos del potencial escalar eléctrico para una distribución estática de carga. Lo mismo se puede realizar para el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  generado por una distribución localizada de corrientes. El procedimiento a seguir es similar al empleado anteriormente.

Partimos de la expresión (147) la cual reproducimos aquí para el espacio vacío

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (173)$$

Usando sólo los dos primeros términos de la expansión de la función  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , ecuación (133) de la sección 2.12, podemos reescribir (173) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \dots, \quad (174)$$

donde  $r = |\mathbf{r}|$ . Para una densidad de corriente localizada y estacionaria la primera de estas integrales, la cual representa el **término monopolar**, es nula. Esto se puede deducir en forma heurística si consideramos que las líneas de flujo de  $\mathbf{J}$  representan corrientes que se cierran sobre si mismas. Para cada una de estas espiras imaginarias tenemos que

$$\mathbf{J}dv = \rho_v \mathbf{v} dv = dq \mathbf{v} = I d\mathbf{l}, \quad (175)$$

donde  $I$  es la corriente y  $d\mathbf{l}$  es un diferencial de longitud a lo largo de la espira. Nótese que hemos usado un razonamiento similar al que condujo a la ecuación (159). Teniendo en cuenta la expresión anterior, para cada espira podremos escribir el término monopolar como

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \oint d\mathbf{l} = 0, \quad (176)$$

el cual es nulo ya que la integral de línea representa la suma vectorial de los desplazamientos en una trayectoria cerrada.

El resultado anterior se puede deducir formalmente [4]. Consideremos para ello la integral

$$\int_V f \mathbf{C} \cdot \nabla' g dv' = \int_V f \left[ C_x \frac{\partial g}{\partial x'} + C_y \frac{\partial g}{\partial y'} + C_z \frac{\partial g}{\partial z'} \right] dx' dy' dz', \quad (177)$$

la cual del lado derecho ha sido escrita en coordenadas cartesianas. Supongamos que los campos escalares  $f$  y  $g$  son funciones bien comportadas, que el campo vectorial  $\mathbf{C}$  está localizado y que la integral se extiende a todo el espacio. Integrando por partes respecto a  $x'$  el primer término del lado derecho de (177) obtenemos

$$\int_V f C_x \frac{\partial g}{\partial x'} dx' dy' dz' = - \int_V g \frac{\partial (f C_x)}{\partial x'} dx' dy' dz', \quad (178)$$

donde hemos usado el hecho de que el campo  $\mathbf{C}$  está localizado (tiende a cero en el infinito). Haciendo lo mismo para los dos términos restantes podemos reescribir (177) como

$$\int_V f \mathbf{C} \cdot \nabla' g dv' = - \int_V g \nabla' \cdot (f \mathbf{C}) dv'. \quad (179)$$

Luego, si consideramos la identidad diferencial (123) de la unidad 1,  $\nabla' \cdot (f \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla' f + f (\nabla' \cdot \mathbf{C})$  y reordenamos términos, la integral anterior queda

$$\int_V [f \mathbf{C} \cdot \nabla' g + g \mathbf{C} \cdot \nabla' f + g f \nabla' \cdot \mathbf{C}] dv' = 0. \quad (180)$$

Esta identidad es muy útil para interpretar los dos primeros términos en (174). En primer lugar, tomando  $f = 1$ ,  $g = x'$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{J}$ , si la densidad de corriente no tiene divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  (de acuerdo a la ecuación de continuidad esto significa que la corriente es estacionaria pues la densidad de corriente no cambia en el tiempo), entonces (180) puede escribirse como

$$\int_V J_x(\mathbf{r}') dv' = 0. \quad (181)$$

Entonces, haciendo lo mismo para cada coordenada (es decir, tomando  $g = y'$  y posteriormente  $g = z'$ ), es posible mostrar que

$$\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = 0, \quad (182)$$

resultado que implica que el término monopolar en (174) es nulo.

Por otro lado, considerando la siguiente nomenclatura,  $x = c_1$ ,  $y = c_2$ ,  $z = c_3$ ,  $J_x = J_1$ ,  $J_y = J_2$  y  $J_z = J_3$ , y eligiendo  $f = c'_i$ ,  $g = c'_j$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{J}$ , donde  $i$  y  $j$  pueden tomar los valores 1, 2 y 3, la identidad (180) puede escribirse como

$$\int_V [c'_i J_j + c'_j J_i] dv' = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V c'_i J_j dv' = - \int_V c'_j J_i dv', \quad (183)$$

donde nuevamente hemos supuesto que la densidad de corriente no tiene divergencia. Usando la expresión anterior, podemos reescribir la componente  $c_i$  de la integral en el segundo término de (174)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \int_V \mathbf{r}' J_i dv' &= \sum_j c_j \int_V c'_j J_i dv' \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j c_j \int_V [c'_i J_j - c'_j J_i] dv' \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{jk} \nu_{ijk} c_j \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}]_k dv' \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \mathbf{r} \times \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dv' \right]_i. \end{aligned} \quad (184)$$

En el desarrollo anterior hemos usado el tensor antisimétrico  $\nu_{ijk}$  el cual se define como

$$\nu_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{(para } i = 1, j = 2 \text{ y } k = 3, \text{ o para cualquier permutación cíclica de los índices)} \\ -1 & \text{(para otras permutaciones no cíclicas, pero con } i \neq j, i \neq k \text{ y } j \neq k) \\ 0 & \text{(cuando dos o más índices son iguales)} \end{cases}.$$

Las permutación obtenidas en forma cíclica son  $(i = 3, j = 1, k = 2)$  y  $(i = 2, j = 3, k = 1)$ , mientras que por ejemplo una no cíclica es  $(i = 1, j = 3, k = 2)$ . Usando (184) podemos reescribir el segundo término de (174) como

$$\boxed{\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}}, \quad (185)$$

donde  $\mathbf{m}$  es el momento dipolar magnético definido como

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dv'}. \quad (186)$$

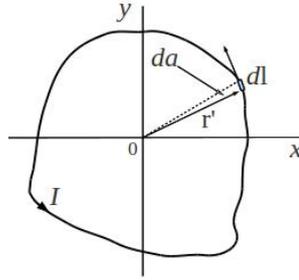


Figura 12: Espira que conduce una corriente estacionaria  $I$ .

A la expresión (185) se la conoce como **término dipolar magnético** y es el que domina en puntos del espacio que se encuentran distantes de las distribución de corriente.

Si la densidad de corriente se reduce a la de una espira, el momento magnético  $\mathbf{m}$  puede expresarse de una forma sencilla. Teniendo en cuenta (175) podemos escribir que

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_l [\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}]. \quad (187)$$

Observando la figura 12, podemos ver fácilmente que  $\frac{1}{2}\mathbf{r}' \times d\mathbf{l} = d\mathbf{a}$ , el cual es un vector perpendicular al plano de la espira cuya magnitud es igual al área barrida por el vector de posición ( $dl \sin \theta$  es la base de un triángulo isósceles de altura  $r'$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre ambos vectores). De esta forma la magnitud del momento dipolar magnético es

$$|\mathbf{m}| = I (\text{área de la espira}), \quad (188)$$

expresión que hemos considerado anteriormente en la unidad 2.

## Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).
- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).
- [7] M. I. Prieto and M. Quintillán, *Am. J. Phys.* **57**, 277 (1989).
- [8] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, **Finite Element Method for Electromagnetics**. IEEE Press (1998).

# Problemas

1. Considere un conductor cargado en forma de anillo de radio  $a$  [ver figura 13 (a)]. Utilice integración directa para calcular el campo eléctrico sobre el eje  $z$ . Demostrar que a grandes distancias el campo producido por el anillo puede reducirse al de una carga puntual.

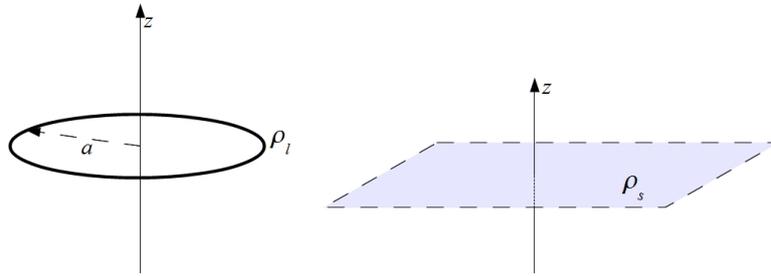


Figura 13: (a) [Izquierda] Problema 1 y (b) [derecha] problema 2.

2. Encontrar por integración directa el campo eléctrico  $\mathbf{E}(0, 0, z)$  de una hoja infinita que está cargada uniformemente y dispuesta en el plano  $z = 0$  [ver figura 13 (b)].
3. Se carga estáticamente un conductor esférico de radio  $a$  con una carga total  $Q$ . ¿Qué distribución de carga existe en el estado estático?. Mediante integración directa para  $\mathbf{E}$  calcular el campo electrostático para todo el espacio.
4. Encontrar el potencial eléctrico producido por un segmento de longitud  $2L$  que está cargado uniformemente con una densidad  $\rho_l$ , para puntos del espacio que se encuentran a una distancia  $x$  medida en dirección transversal al punto medio del segmento. La configuración del sistema es similar a la mostrada en el diagrama de la figura 10, pero en este caso no se trata de una corriente sino de una densidad estática de carga.
5. Utilizando los datos del problema 1, mediante integración directa calcular el potencial eléctrico  $\Phi$ . A partir de este resultado encontrar el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ .
6. Encontrar el potencial eléctrico  $\Phi$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  producido por una esfera hueca de radio  $a$  y carga  $Q$  [ver figura 14 (a)]. Graficar  $\Phi$  contra  $r$ .
7. Encontrar el potencial eléctrico  $\Phi$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  producido por una esfera dieléctrica sólida de radio  $a$  y permitividad  $\epsilon$ , la cual está cargada uniformemente con una carga  $Q$  [ver figura 14 (b)]. Graficar  $\Phi$  contra  $r$ .

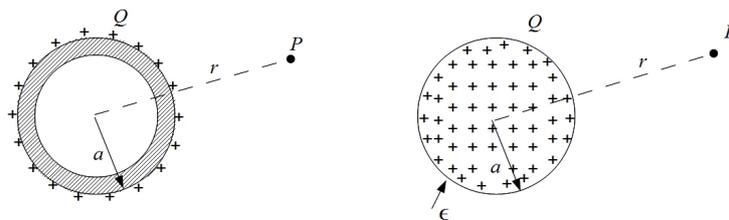


Figura 14: (a) [Izquierda] Problema 6 y (b) [derecha] problema 7.

8. Calcular los campos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  para un capacitor de placas paralelas y uno esférico (ver figura 15), suponiendo que ambos conductores están separados por un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ . Utilizando los resultados anteriores calcule:
- El potencial eléctrico  $\Phi$  en cualquier punto entre los dos conductores, suponiendo la referencia cero de potencial en el conductor negativo.
  - La capacitancia para ambos casos.
  - La energía almacenada para ambos casos.

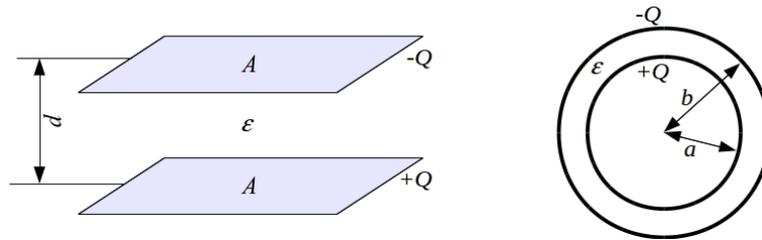


Figura 15: Problemas 8, 9 y 10.

- Una estructura de placas paralelas (ver figura 15) tiene su placa inferior a potencial  $\Phi = 0$ , en tanto que su placa superior está a potencial  $\Phi$ . Despreciando efectos de borde, resolver la ecuación de Laplace para el potencial en cualquier punto entre las placas, sujeto a las condiciones de frontera apropiadas. Demostrar que  $\mathbf{E}$  es constante en todos los puntos situados entre las placas.
- Considere un capacitor esférico (ver figura 15) el cual tiene  $\Phi(a) = \Phi_a$  y en  $\Phi(b) = 0$ . Obtener mediante integración de la ecuación de Laplace los campos  $\Phi$  y  $\mathbf{E}$  en el interior.
- Calcular el potencial eléctrico para la región  $x \geq 0$  producido por una carga eléctrica  $q$ , que se encuentra situada a 10 cm de un plano conductor infinito puesto a potencial  $\Phi_0$  [ver figura 16 (a)].

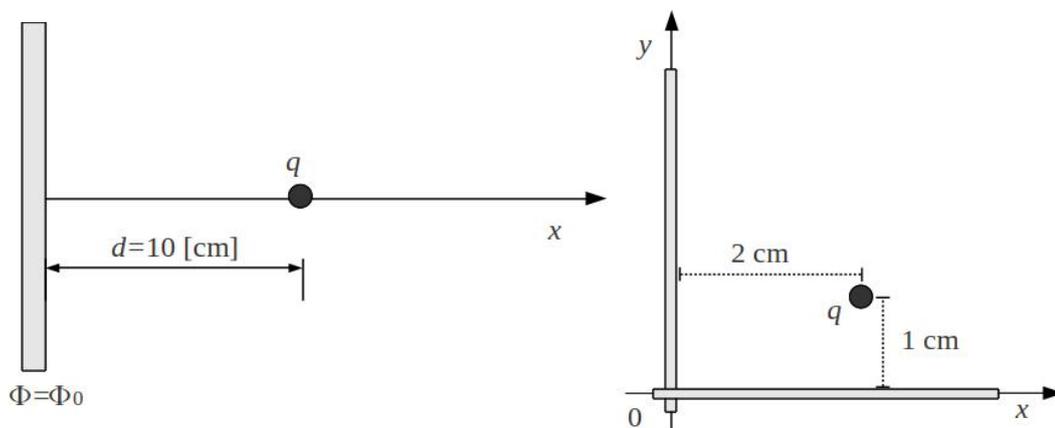


Figura 16: (a) [Izquierda] Problema 11 y (b) [derecha] problema 12.

12. Calcular el potencial eléctrico para la región  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$  producido por una carga eléctrica  $q$ , que se encuentra situada frente a un ángulo formado por planos conductores semi infinitos (pero infinitos en la dirección  $z$ ) puestos a potencial cero. La figura 16 (b) muestra un esquema del sistema. También calcular la magnitud de la fuerza que experimenta la carga y el ángulo conductor.
13. Utilizando las gráficas de flujo dadas en la figura 17, estimar las capacitancias por metro de profundidad para cada uno de los capacitores mostrados. Suponga que el medio dieléctrico es aire.

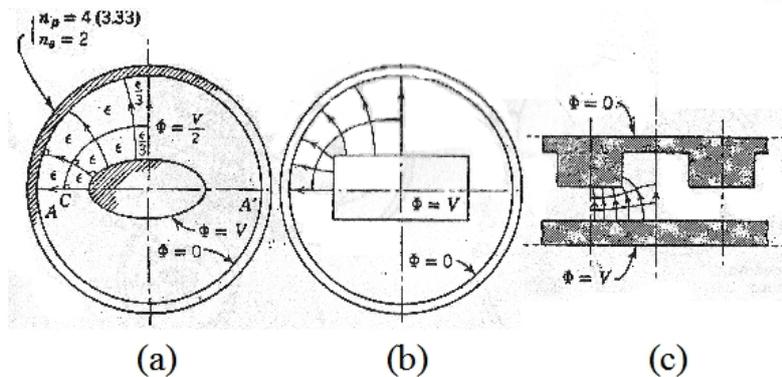


Figura 17: Problema 13: (a) Cilindro elíptico dentro de un tubo. (b) Cilindro rectangular dentro de un tubo. (c) Estructura dentada arriba de un plano.

14. Calcular el potencial eléctrico aproximado producido por una esfera de radio  $R$  centrada en el origen y que posee una densidad de carga  $\rho_v(r, \theta) = k \frac{R^2}{r^2} (1 - 2r) \sin(\theta)$ , donde  $k$  es una constante. Suponga que el punto de interés esta muy alejado de la esfera.
15. Calcular el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  a una distancia perpendicular  $\rho$  del alambre mostrado en la figura 10, el cual conduce una corriente  $I$ .
16. Calcular el campo magnético sobre el eje  $\mathbf{a}_z$  producido por una espira circular de radio  $R$  por la que circula una corriente eléctrica estacionaria  $I$  (Ver figura 18).

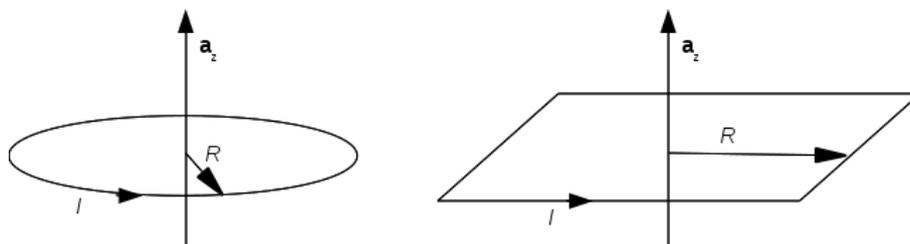


Figura 18: Problemas 16 y 17.

17. Calcular el campo magnético sobre el eje  $\mathbf{a}_z$  producido por una espira cuadrada por la que circula una corriente eléctrica uniforme  $I$ . Generalice este resultado para un polígono de  $n$ -lados (Ver figura 18).

18. Encontrar el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto  $P$  para las dos configuraciones mostradas en la figura 19.

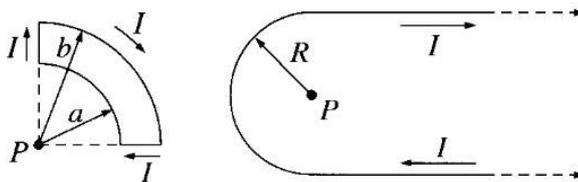


Figura 19: Problema 18.

19. Deducir la ecuación (167) de la sección 3.3, que es la fuerza entre dos conductores infinitos que acarrean corrientes estacionarias.
20. Encontrar la fuerza sobre una espira cuadrada cuando la misma está situada en la cercanías de una línea de corriente infinita. Repita este calculo pero para el caso de una espira triangular (ver figura 20).



Figura 20: Problema 20.

21. Calcular la densidad de energía dentro de un solenoide infinito que tiene un número  $n$  de vueltas por unidad de longitud.
22. Calcular el campo magnético producido por la espira de corriente de la figura 21, en puntos situados a grandes distancias del origen de coordenadas.

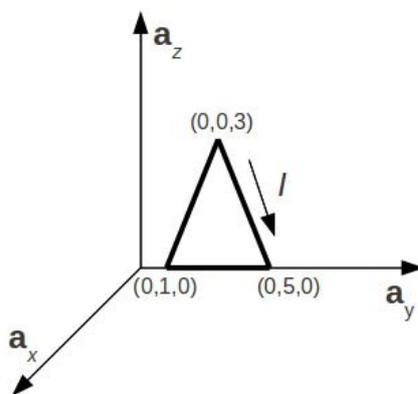


Figura 21: Problema 22