

# Unidad 5

## Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas

14 de junio de 2018

En esta unidad estudiaremos la reflexión y transmisión de ondas planas en diferentes tipos de medios. Comenzaremos analizando el caso particular de incidencia normal sobre una superficie conductora perfecta y luego pasaremos a estudiar situaciones más generales, en las que una onda se propaga a través de diferentes medios con y sin pérdidas. Para resolver este tipo de problemas aprenderemos a usar la carta de Smith la cual, como veremos en la Unidad 7, también es una herramienta poderosa para analizar y resolver acoplamientos de impedancias. Finalmente, estudiaremos la incidencia oblicua de ondas electromagnéticas y los fenómenos de reflexión en tierra y en la ionosfera.

### 1. Reflexión normal de una onda plana sobre una superficie conductora perfecta

Consideremos una onda plana que viaja en un medio sin pérdidas en el sentido positivo del eje  $z$ . Suponiendo que el campo eléctrico está polarizado en la dirección  $x$ , podemos escribir que

$$E_x^+(z, t) = E_m^+ \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

donde hemos tomado el ángulo de fase igual a cero. Si esta onda incide sobre un medio conductor perfecto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), entonces podemos asegurar que el campo eléctrico dentro del conductor será nulo. Suponiendo que la incidencia es normal y que la interacción que separa los dos medios es plana y está situada en  $z = \text{cte}$ , para cumplir con la condición de frontera para los campos eléctricos tangenciales, debemos considerar un término correspondiente a una onda reflejada que viaja en el sentido negativo de  $z$ ,

$$E_x^-(z, t) = E_m^- \cos(\omega t + \beta z + \phi^-). \quad (2)$$

Sumando estas dos ondas es posible determinar los valores de  $E_m^-$  y  $\phi^-$ , que se necesitan para cumplir con la continuidad del campo eléctrico tangencial en la interacción.

Para analizar este caso particular, trabajaremos con las expresiones armónicas complejas. La suma de las dos ondas viajeras puede escribirse como

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_x^+(z) + \hat{E}_x^-(z) = \hat{E}_m^+ e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{j\beta z}. \quad (3)$$

Supongamos ahora que la interacción plana se encuentra en  $z = 0$ . Aplicando la condición de frontera  $\hat{E}_x(0) = 0$ , vemos que  $\hat{E}_m^+ + \hat{E}_m^- = 0$  o

$$\hat{E}_m^+ = -\hat{E}_m^-. \quad (4)$$

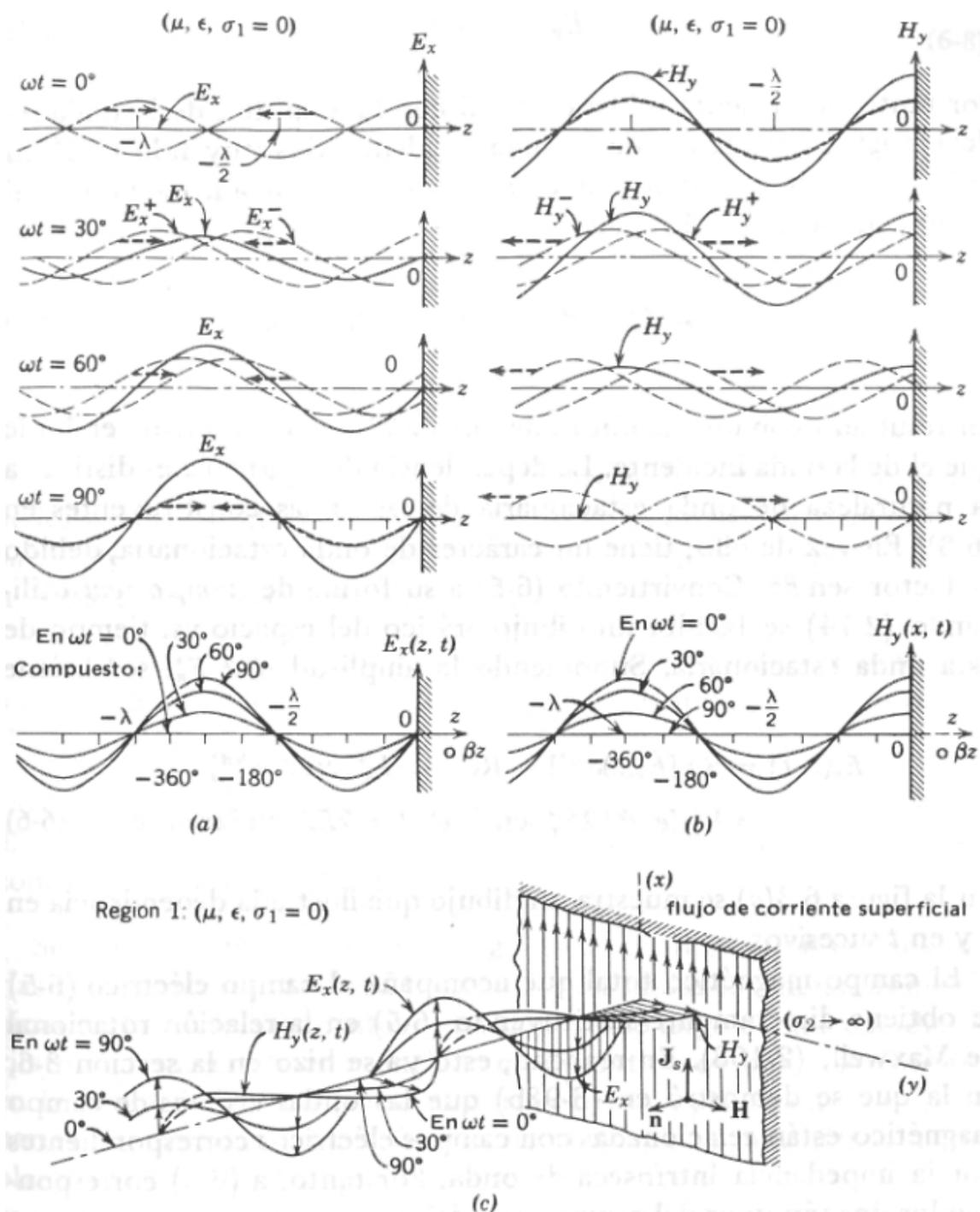


Figura 1: Onda estacionaria que resulta de la incidencia normal de una onda plana sobre una superficie conductora perfecta. Campos (a) eléctrico, (b) magnético y (c) esquema vectorial de ambos campos.

Esto indica que la reflexión de la onda incidente es total. El campo eléctrico podrá escribirse como

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ [e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] = -2j\hat{E}_m^+ \text{sen}(\beta z). \quad (5)$$

Observemos que esta expresión no representa una onda viajera sino una **onda estacionaria**.

Multiplicando por  $e^{j\omega t}$  y tomando la parte real obtenemos

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \text{Re} \left[ \hat{E}_x(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ -2j \hat{E}_m^+ \text{sen}(\beta z) e^{j\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[ 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \hat{E}_m^+ \text{sen}(\beta z) e^{j\omega t} \right] = 2E_m^+ \text{sen}(\beta z) \text{sen}(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

donde hemos supuesto que la amplitud  $\hat{E}_m^+$  es un número real. La figura 1 (a), la cual ha sido tomada de la referencia [1], muestra este campo eléctrico para diferentes tiempos.

El campo magnético puede calcularse usando el concepto de impedancia intrínseca de onda. De esta forma obtenemos

$$\hat{H}_y(z) = \hat{H}_y^+(z) + \hat{H}_y^-(z) = \frac{\hat{E}_m^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\eta} e^{j\beta z}, \quad (7)$$

en donde  $\eta \equiv \sqrt{\mu/\epsilon}$ . Esta expresión se puede reescribir como

$$\hat{H}_y(z) = \frac{\hat{E}_m^+}{\eta} [e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}] = \frac{2\hat{E}_m^+}{\eta} \cos(\beta z), \quad (8)$$

donde su forma de tiempo real será

$$H_y(z, t) = \text{Re} \left[ \hat{H}_y(z) e^{j\omega t} \right] = \frac{2E_m^+}{\eta} \cos(\beta z) \cos(\omega t). \quad (9)$$

Esta función también es una onda estacionaria pero está desfasada  $\pi/2$  respecto al campo eléctrico. Notemos que el campo  $H_y$  no tiene un nodo sobre el plano  $z = 0$ . La figura 1 (b) muestra un esquema de este campo para diferentes tiempos.

El campo magnético no puede caer a cero sin inducir una corriente superficial en la interacción. La condición de frontera para la componente tangencial de este campo era

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s. \quad (10)$$

Como dentro del conductor  $\mathbf{H}_2 = 0$ , entonces tenemos que

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s. \quad (11)$$

Considerando la figura 1 (c), vemos que las componentes de estos vectores serán  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$  y  $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$ . Por lo tanto tendremos que

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{a}_x H_y. \quad (12)$$

Notemos que esta corriente está en fase con el campo magnético. También podemos ver que, aunque el campo eléctrico es cero sobre la superficie, puede existir una corriente superficial de cargas libres. Esto se debe a que el plano tiene una conductividad infinita.

## 2. Reflexión y transmisión para dos o más regiones con pérdidas

Consideramos primero el caso de la propagación de una onda plana a través de dos regiones que tienen una conductividad finita,  $\sigma_1 \neq 0$  y  $\sigma_2 \neq 0$  (también podrían ser dieléctricos con pérdidas), los cuales están separados por una interacción plana situada en  $z = 0$ . La figura 2

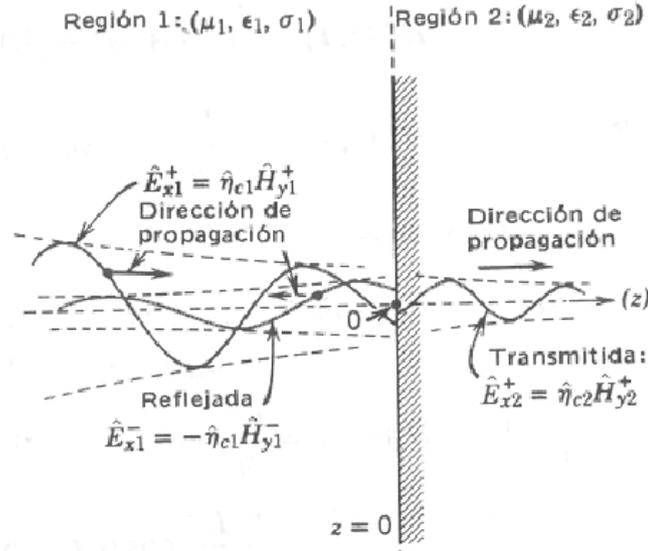


Figura 2: Onda plana que incide normalmente en una interacción que separa dos regiones con pérdidas.

muestra un esquema de este sistema. La expresiones para los campos de la onda viajera que incide en forma normal de la región 1 a la 2, y se mueven en la dirección positiva de  $z$ , son (ver Unidad 4, **Ondas electromagnéticas en regiones con pérdidas**)

$$\hat{E}_{x1}^+(z) = \hat{E}_{m1}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad \text{y} \quad \hat{H}_{y1}^+(z) = \frac{\hat{E}_{m1}^+}{\hat{\eta}_1} e^{-\gamma_1 z}, \quad (13)$$

donde la constante de propagación es  $\gamma = \alpha + j\beta$  y la impedancia de onda es compleja

$$\hat{\eta} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}} e^{j\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}. \quad (14)$$

Recodemos que haciendo la sustitución

$$\epsilon \rightarrow \epsilon' \quad \text{y} \quad \frac{\sigma}{\omega} \rightarrow \epsilon'', \quad (15)$$

es posible extender las expresiones anteriores y las que siguen al caso de dieléctricos con pérdidas.

Las condiciones de frontera para interacciones que separan medios con pérdidas, implican la continuidad de las componentes tangenciales de ambos campos. Por un lado, como la región 2 tiene conductividad finita, debemos considerar la existencia de ondas transmitidas que se propagan en dicha región y en el sentido positivo de  $z$

$$\hat{E}_{x2}^+(z) = \hat{E}_{m2}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad \text{y} \quad \hat{H}_{y2}^+(z) = \frac{\hat{E}_{m2}^+}{\hat{\eta}_2} e^{-\gamma_2 z}. \quad (16)$$

No obstante, como en general tendremos que  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  y  $\hat{\eta}_1 \neq \hat{\eta}_2$ , para satisfacer las condiciones de frontera en la interacción, tendremos que incluir una onda reflejada que se propague en la región 1 en el sentido negativo de  $z$ ,

$$\hat{E}_{x1}^-(z) = \hat{E}_{m1}^- e^{\gamma_1 z} \quad \text{y} \quad \hat{H}_{y1}^-(z) = -\frac{\hat{E}_{m1}^-}{\hat{\eta}_1} e^{\gamma_1 z}. \quad (17)$$

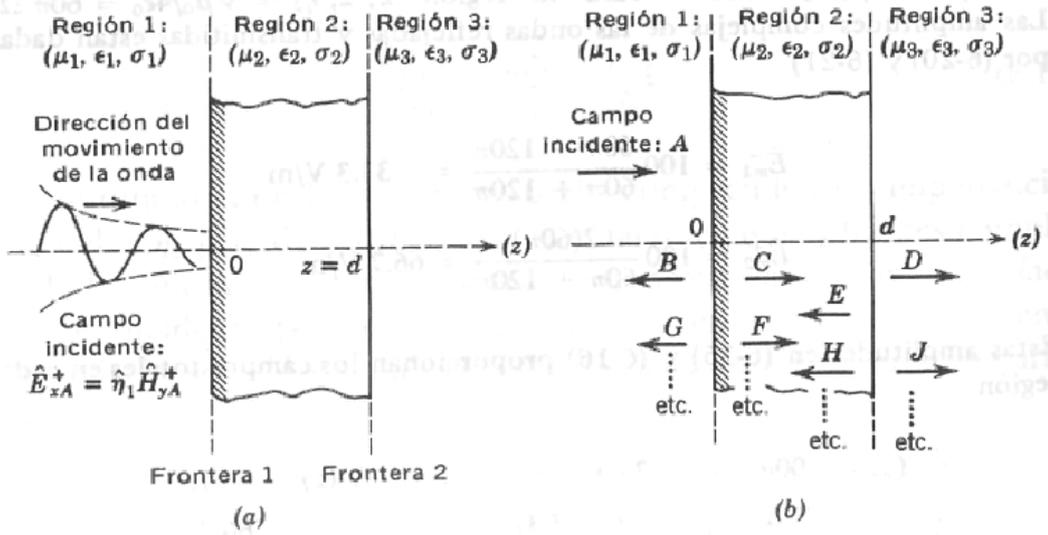


Figura 3: (a) Onda plana que incide desde la izquierda en un sistema formado por tres regiones. (b) Multiplicidad de ondas transmitidas y reflejadas en cada región.

Como hemos supuesto que las fuentes que generan el campo están en la región 1 y que la región 2 es semi infinita, no es posible considerar una onda reflejada en la región 2.

Aplicando la condición de frontera para una interacción plana situada en  $z = 0$ , tenemos que para el campo eléctrico se debe cumplir que

$$\left[ \hat{E}_{m1}^+ e^{-\gamma_1 z} + \hat{E}_{m1}^- e^{\gamma_1 z} \right] \Big|_{z=0} = \left[ \hat{E}_{m2}^+ e^{-\gamma_2 z} \right] \Big|_{z=0}, \quad (18)$$

lo que es equivalente a

$$\hat{E}_{m1}^+ + \hat{E}_{m1}^- = \hat{E}_{m2}^+. \quad (19)$$

Por otro lado, planteando la continuidad del campo magnético tangencial, obtenemos la expresión

$$\frac{\hat{E}_{m1}^+}{\hat{\eta}_1} - \frac{\hat{E}_{m1}^-}{\hat{\eta}_1} = \frac{\hat{E}_{m2}^+}{\hat{\eta}_2}. \quad (20)$$

Ya que conocemos los valores de las impedancias de onda en ambas regiones y suponemos conocido el valor de la amplitud de la onda incidente, a partir de las dos ecuaciones anteriores podemos deducir las siguientes expresiones

$$\boxed{\hat{E}_{m1}^- = \hat{E}_{m1}^+ \frac{\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1}}, \quad (21)$$

y

$$\boxed{\hat{E}_{m2}^+ = \hat{E}_{m1}^+ \frac{2\hat{\eta}_2}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1}}. \quad (22)$$

Observemos que si la región 2 fuera un conductor perfecto, entonces tendríamos que  $\hat{E}_{m2}^+ = 0$  y  $\hat{E}_{m1}^+ = -\hat{E}_{m1}^-$  (esto se puede deducir considerando que cuando  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\eta}_2 \rightarrow 0$ ). Por otro lado, como es de esperar, si los medios son idénticos ( $\hat{\eta}_2 = \hat{\eta}_1$ ) no existe una onda reflejada ( $\hat{E}_{m1}^- = 0$ ) y  $\hat{E}_{m2}^+ = \hat{E}_{m1}^+$ .

Cuando hay más de dos regiones involucradas tendremos una multiplicidad de ondas transmitidas y reflejadas. Supongamos que la primera y la última región son semi infinitas, mientras

que las regiones interiores tienen un espesor definido. La figura 3 (a) muestra un ejemplo para tres regiones. La onda plana que incide desde la región 1 produce dos ondas, una reflejada por la interacción y otra que se transmite en la región 2. En la figura 3 (b) estas tres ondas son denominadas, respectivamente, A, B y C. Por otro lado, la onda C produce tanto una señal D que se transmite a la región 3, como una E que se refleja. Esta última onda, al incidir en la interacción entre los medios 2 y 1, produce una señal reflejada F y una G que se transmite a la región 1. Siguiendo indefinidamente este proceso, podemos deducir que en cada región tendremos infinitas ondas que viajan en ambos sentidos de propagación (a excepción de la última región, donde sólo hay ondas que se propagan en el sentido positivo de  $z$ ). No obstante, como en una dada región  $s$  cada una de las ondas que se propaga en el sentido positivo de  $z$  tiene la misma constante de propagación  $\gamma_s$  pero diferente amplitud y fase, su suma corresponderá a una única onda transmitida de la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} \hat{E}_{msi}^+ e^{-\gamma_s z} = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \hat{E}_{msi}^+ \right] e^{-\gamma_s z} = \hat{E}_{ms}^+ e^{-\gamma_s z}. \quad (23)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, concluimos que en esta región también existirá una única onda reflejada que se propagará en el sentido negativo de  $z$  (salvo en la última región donde tendremos sólo una onda transmitida).

Si el número de regiones es  $n$ , entonces para los dos campos podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{E}_{x1}(z) &= \hat{E}_{m1}^+ e^{-\gamma_1 z} + \hat{E}_{m1}^- e^{\gamma_1 z} \\ \hat{H}_{y1}(z) &= \frac{\hat{E}_{m1}^+}{\hat{\eta}_1} e^{-\gamma_1 z} - \frac{\hat{E}_{m1}^-}{\hat{\eta}_1} e^{\gamma_1 z} \\ \hat{E}_{x2}(z) &= \hat{E}_{m2}^+ e^{-\gamma_2 z} + \hat{E}_{m2}^- e^{\gamma_2 z} \\ \hat{H}_{y2}(z) &= \frac{\hat{E}_{m2}^+}{\hat{\eta}_2} e^{-\gamma_2 z} - \frac{\hat{E}_{m2}^-}{\hat{\eta}_2} e^{\gamma_2 z} \\ &\vdots \\ \hat{E}_{xn}(z) &= \hat{E}_{mn}^+ e^{-\gamma_n z} \\ \hat{H}_{yn}(z) &= \frac{\hat{E}_{mn}^+}{\hat{\eta}_n} e^{-\gamma_n z}. \end{aligned} \quad (24)$$

Luego, si las interacciones planas se encuentran situadas en  $z_1, z_2, \dots$  y  $z_{n-1}$ , entonces para solucionar el problema tendremos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones, las cuales deben cumplirse para satisfacer las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \hat{E}_{x1}(z_1) &= \hat{E}_{x2}(z_1) \\ \hat{H}_{y1}(z_1) &= \hat{H}_{y2}(z_1) \\ \\ \hat{E}_{x2}(z_2) &= \hat{E}_{x3}(z_2) \\ \hat{H}_{y2}(z_2) &= \hat{H}_{y3}(z_2) \\ &\vdots \\ \hat{E}_{xn-1}(z_{n-1}) &= \hat{E}_{xn}(z_{n-1}) \\ \hat{H}_{yn-1}(z_{n-1}) &= \hat{H}_{yn}(z_{n-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

Este es un sistema de  $2(n-1)$  ecuaciones con  $2(n-1)$  incógnitas (como siempre, suponemos que la amplitud de la onda incidente es conocida).

### 3. Solución en términos del coeficiente de reflexión y la impedancia de onda

Cuando el número de regiones es grande, la tarea de resolver el sistema de ecuaciones (25) puede ser muy costosa. No obstante, para este tipo de problemas se puede seguir un procedimiento mucho más sencillo que se describirá a continuación.

Como hemos visto en la sección anterior, una onda plana que incide normalmente en un sistema formado por  $n$  capas múltiples, genera en cada región una onda que viaja en el sentido positivo de  $z$  y otra en que se propaga en el sentido opuesto, con la excepción de la última región para la cual sólo aparece una onda transmitida. La expresión armónica para el campo eléctrico en cada región (por simplicidad, se ha suprimido el subíndice que indica a qué región nos referimos) será

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{E}_m^- e^{\gamma z} = \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} \left[ 1 + \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{E}_m^+} e^{2\gamma z} \right] = \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} \left[ 1 + \hat{\Gamma}(z) \right], \quad (26)$$

donde a la función

$$\hat{\Gamma}(z) = \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{E}_m^+} e^{2\gamma z}, \quad (27)$$

se la conoce como el **coeficiente de reflexión** en la posición  $z$ . El campo magnético correspondiente será

$$\hat{H}_y(z) = \hat{H}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{H}_m^- e^{\gamma z} = \frac{\hat{E}_m^+}{\hat{\eta}} e^{-\gamma z} \left[ 1 - \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{E}_m^+} e^{2\gamma z} \right] = \frac{\hat{E}_m^+}{\hat{\eta}} e^{-\gamma z} \left[ 1 - \hat{\Gamma}(z) \right]. \quad (28)$$

Para cada punto  $z$ , también se define una **impedancia total de campo** como el cociente entre los campos (26) y (28)

$$\hat{Z}(z) = \frac{\hat{E}_x(z)}{\hat{H}_y(z)} = \hat{\eta} \frac{1 + \hat{\Gamma}(z)}{1 - \hat{\Gamma}(z)}. \quad (29)$$

A partir de esta ecuación también podemos expresar el coeficiente de reflexión como

$$\hat{\Gamma}(z) = \frac{\hat{Z}(z) - \hat{\eta}}{\hat{Z}(z) + \hat{\eta}}. \quad (30)$$

Finalmente, otra expresión útil que relaciona los coeficientes de reflexión para dos puntos  $z'$  y  $z$  es

$$\hat{\Gamma}(z') = \hat{\Gamma}(z) e^{2\gamma(z'-z)}, \quad (31)$$

la cual puede deducirse fácilmente a partir de su definición (27).

Las funciones  $\hat{\Gamma}(z)$  y  $\hat{Z}(z)$  cumplen con las siguientes propiedades:

- 1) **La impedancia total de campo  $\hat{Z}(z)$  es una función continua incluso en una interacción.** Es decir, si la interacción se encuentra en  $z = a$ , entonces  $\hat{Z}(a^+) = \hat{Z}(a^-)$ . Este resultado es una consecuencia de la continuidad de las componentes tangenciales de ambos campos.
- 2) **El coeficiente de reflexión  $\hat{\Gamma}(z)$  es discontinuo en la interacción,** lo que se sigue de la expresión (30) pues en general el valor de la impedancia intrínseca de onda será diferente en ambas regiones.

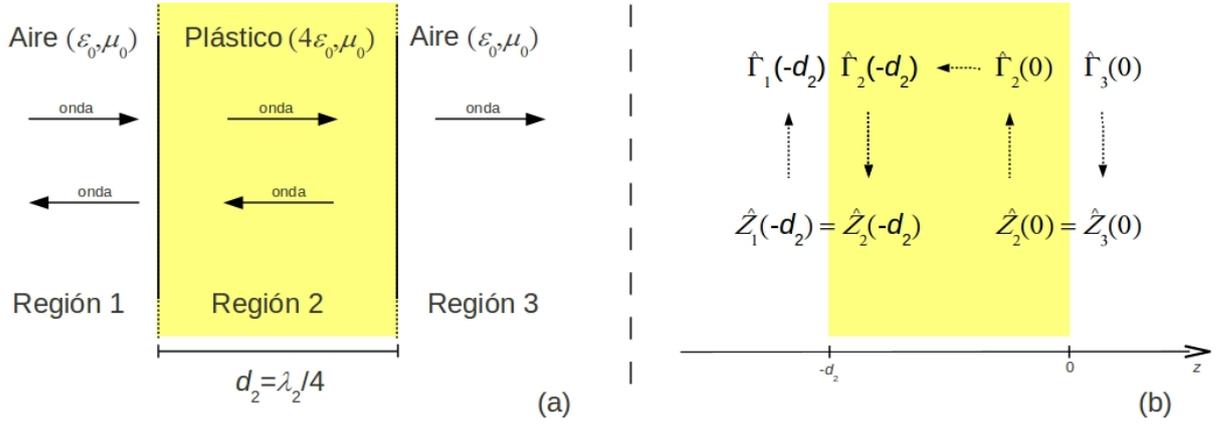


Figura 4: (a) Onda plana que incide normalmente en un material de plástico. (b) Esquema del proceso de cálculo.

Usando un ejemplo ilustraremos cómo encontrar las amplitudes complejas de las ondas en cada región.

**Problema.** Una onda monocromática plana de frecuencia  $\nu = 1$  [MHz] que se propaga en el aire (parámetros  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$ ), incide en forma normal sobre una pieza de plástico (con parámetros  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$  y  $\sigma = 0$ ) cuyo espesor  $d_2$  es igual a un cuarto de la longitud de onda dentro de este material, es decir,  $d_2 = \lambda_2/4$  [ver figura 4 (a)]. La onda finalmente abandona el plástico y se transmite hacia el aire. Supondremos que la señal incidente tiene polarización  $x$  y una amplitud  $\hat{E}_{m1}^+ = 100$  [V/m]. Se pide determinar las amplitudes de las ondas restantes (en el plástico y en el aire).

**Solución.** Para lograr mayor claridad, en la figura 4 (b) se esquematiza el proceso de cálculo. A continuación se enumeran los pasos a seguir:

- El sistema está formado por tres regiones, aire, plástico y aire, las cuales denominaremos regiones 1, 2 y 3, respectivamente.
- Lo primero que debemos hacer es calcular la impedancia intrínseca de onda para cada región: como  $\sigma = 0$ , para el aire tenemos que  $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_3 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$  [ $\Omega$ ] y para el plástico  $\hat{\eta}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = 60\pi$  [ $\Omega$ ]. Por otro lado, las constantes de propagación se pueden determinar a partir de  $\hat{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$  ( $\alpha = 0$  ya que  $\sigma = 0$ ). Para cada región se cumplirá que  $\hat{\gamma} = j2\pi/\lambda$ .
- Empezamos a resolver el problema siempre por la última región. Como esta sólo posee una onda transmitida el coeficiente de reflexión será cero [ver ecuación (27)]. Entonces, si el origen del eje  $z$  se encuentra justo en esa última interacción, entonces podemos escribir que  $\hat{\Gamma}_3(0) = 0$  y la impedancia total de campo será  $\hat{Z}_3(0) = \hat{\eta}_3 = 120\pi$  [ $\Omega$ ]. Como la impedancia es continua, dentro del plástico tendremos que  $\hat{Z}_2(0) = \hat{Z}_3(0) = 120\pi$  [ $\Omega$ ].
- A continuación, usando la ecuación (30), calculamos el coeficiente de reflexión para  $z = 0$  pero dentro de la región 2:

$$\hat{\Gamma}_2(0) = \frac{\hat{Z}_2(0) - \hat{\eta}_2}{\hat{Z}_2(0) + \hat{\eta}_2} = \frac{120\pi - 60\pi}{120\pi + 60\pi} = \frac{1}{3}. \quad (32)$$

En la interacción entre las regiones 1 y 2 (del lado de la región 2) la cual está situada en  $z = -d_2$ , podemos calcular el coeficiente de reflexión usando la ecuación (31):

$$\hat{\Gamma}_2(-d_2) = \hat{\Gamma}_2(0) e^{2\gamma_2(-d_2-0)} = \hat{\Gamma}_2(0) e^{-2\gamma_2\lambda_2/4} = \frac{1}{3} e^{-j\pi} = -\frac{1}{3}. \quad (33)$$

e) Ahora, a partir del coeficiente de reflexión anterior y usando la ecuación (29), calculamos la impedancia total de campo en la interacción que separa las regiones 1 y 2:

$$\hat{Z}_2(-d_2) = \hat{\eta}_2 \frac{1 + \hat{\Gamma}_2(-d_2)}{1 - \hat{\Gamma}_2(-d_2)} = 60\pi \frac{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 30\pi \text{ } [\Omega]. \quad (34)$$

Debido a que la impedancia es continua, tenemos que  $\hat{Z}_1(-d_2) = \hat{Z}_2(-d_2)$ .

f) Luego, con la impedancia  $\hat{Z}_1(-d_2)$  y la ecuación (30), podemos calcular el coeficiente de reflexión en la interacción del lado de la región 1:

$$\hat{\Gamma}_1(-d_2) = \frac{\hat{Z}_1(-d_2) - \hat{\eta}_1}{\hat{Z}_1(-d_2) + \hat{\eta}_1} = \frac{30\pi - 120\pi}{30\pi + 120\pi} = -\frac{3}{5}. \quad (35)$$

g) Ahora podemos calcular las amplitudes de las ondas en todas las regiones. Para evitar arrastrar términos de fase, las ondas en cada región serán descritas por sistemas de referencias particulares, cuyos orígenes se encuentran en la interacción entre 1 y 2 (para las ondas en la región 1), y entre la región 2 y 3 (para las ondas en las regiones 2 y 3). Comenzamos por la región 1. En este medio y usando la definición (27) del coeficiente de reflexión (expresado en el nuevo sistema de referencia), podemos determinar el valor de  $\hat{E}_{m1}^-$ :

$$\hat{E}_{m1}^- = \hat{E}_{m1}^+ \hat{\Gamma}_1(0) e^{-2\gamma_1 0} = 100 \left(-\frac{3}{5}\right) = -60 \text{ [V/m]}. \quad (36)$$

Entonces el campo eléctrico total en la región 1 será

$$\hat{E}_{x1}(z) = \hat{E}_{m1}^+ e^{-\gamma_1 z} + \hat{E}_{m1}^- e^{\gamma_1 z} = 100 e^{-j\beta_1 z} - 60 e^{j\beta_1 z} \text{ [V/m]}, \quad (37)$$

y el campo magnético asociado

$$\hat{H}_{y1}(z) = \frac{100}{120\pi} e^{-j\beta_1 z} - \frac{(-60)}{120\pi} e^{j\beta_1 z} = 0,266 e^{-j\beta_1 z} + 0,159 e^{j\beta_1 z} \text{ [A/m]}. \quad (38)$$

h) Considerando que el campo eléctrico tangencial es continuo, podemos calcular su amplitud en la región 2:

$$\hat{E}_{x1}(0) = 100 - 60 = 40 = \hat{E}_{x2}(-d_2). \quad (39)$$

Luego, usando (26), podemos deducir una expresión para determinar  $\hat{E}_{m2}^+$ :

$$\hat{E}_{m2}^+ = \hat{E}_{x2}(z) \frac{e^{\gamma_2 z}}{1 + \hat{\Gamma}_2(z)}. \quad (40)$$

Tomando  $z = -d_2 = -\lambda_2/4$  y considerando que  $\gamma_2 z = (j2\pi/\lambda_2)(-\lambda_2/4) = -j\pi/2$  encontramos que

$$\hat{E}_{m2}^+ = 40 \frac{e^{-j\pi/2}}{1 - \frac{1}{3}} = -j60 \text{ [V/m]}. \quad (41)$$

Finalmente, usando la definición del coeficiente de reflexión (27), podemos calcular  $\hat{E}_{m2}^-$ :

$$\hat{E}_{m2}^- = -j60 \left(-\frac{1}{3}\right) e^{j\pi} = -j20 \text{ [V/m]}. \quad (42)$$

Las amplitudes en las restantes interacciones pueden calcularse en forma similar.

## 4. Solución gráfica usando la carta de Smith

Si en un problema de propagación de ondas en regiones múltiples se necesita obtener valores muy precisos, los cálculos deben realizarse como en la sección anterior. Sin embargo, si sólo se desean obtener cantidades aproximadas, es conveniente emplear la denominada **carta de Smith**. Esta permite calcular gráficamente la impedancia total de campo a partir del coeficiente de reflexión y viceversa, y las variaciones de estas cantidades cuando se producen desplazamientos dentro de una dada región.

La base teórica que conduce a la carta de Smith es la siguiente. Consideremos primero la impedancia total de campo (29) pero normalizada por la impedancia de onda

$$\boxed{\frac{\hat{Z}(z)}{\hat{\eta}} = \hat{z}(z) = \frac{1 + \hat{\Gamma}(z)}{1 - \hat{\Gamma}(z)}}. \quad (43)$$

De esta forma, el coeficiente de reflexión (30) podrá reescribirse como

$$\boxed{\hat{\Gamma}(z) = \frac{\hat{z}(z) - 1}{\hat{z}(z) + 1}}. \quad (44)$$

Estas dos expresiones representan **transformaciones bilineales** que permiten transformar círculos (o líneas) dados en el plano complejo de una de las variables, en círculos en el plano complejo de la otra variable.

Veamos cómo esto es posible. En primer lugar, representaremos la impedancia total de campo normalizada y el coeficiente de reflexión como

$$\hat{z} = r + jx \quad \text{y} \quad \hat{\Gamma} = \Gamma_r + j\Gamma_i. \quad (45)$$

Entonces tendremos que la ecuación (43) se puede escribir como

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}. \quad (46)$$

Racionalizando el denominador e igualando las partes real e imaginaria obtenemos

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}, \quad (47)$$

y

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}. \quad (48)$$

Las transformaciones bilineales convierten rectas del plano complejo  $\hat{z}$ , para las cuales  $r = \text{constante}$  o  $x = \text{constante}$ , en círculos en el plano complejo de  $\hat{\Gamma}$ . La figura 5 muestra varios ejemplos de esta transformación. Para demostrar que esta afirmación es correcta, basta con reescribir la ecuación (47) completando cuadrados (se deja como ejercicio para el alumno)

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2. \quad (49)$$

Para  $r = \text{constante}$ , la expresión anterior representa a una familia de círculos de radio  $1/(r+1)$  centrados en el punto  $P[r/(r+1), 0]$ . En forma similar, suponiendo  $x = \text{constante}$ , a partir de (48) obtenemos otra familia de círculos (la demostración también se deja como ejercicio)

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2, \quad (50)$$

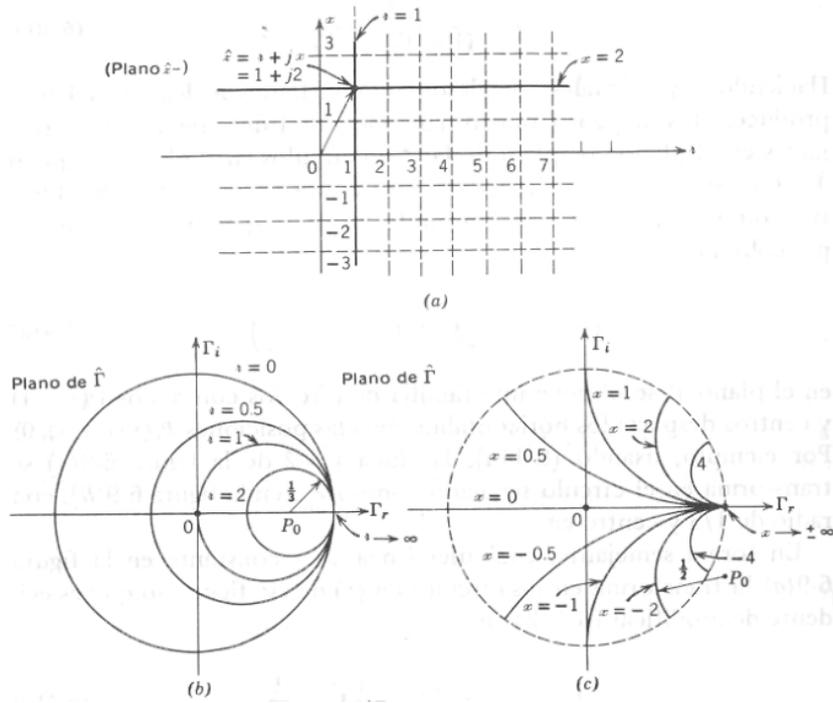


Figura 5: (a) Rectas en el plano complejo de la variable  $\hat{z}$ . Los círculos en el plano complejo de  $\hat{\Gamma}$  correspondientes a rectas en plano de  $\hat{z}$ , para las cuales (b)  $r = \text{constante}$  y (c)  $x = \text{constante}$ .

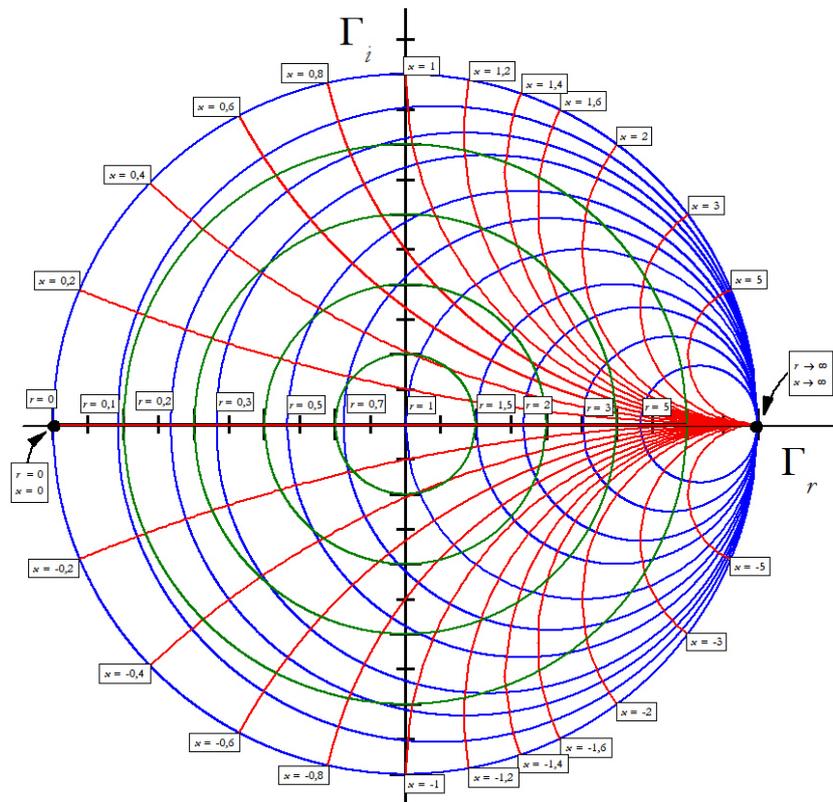


Figura 6: Carta de Smith.

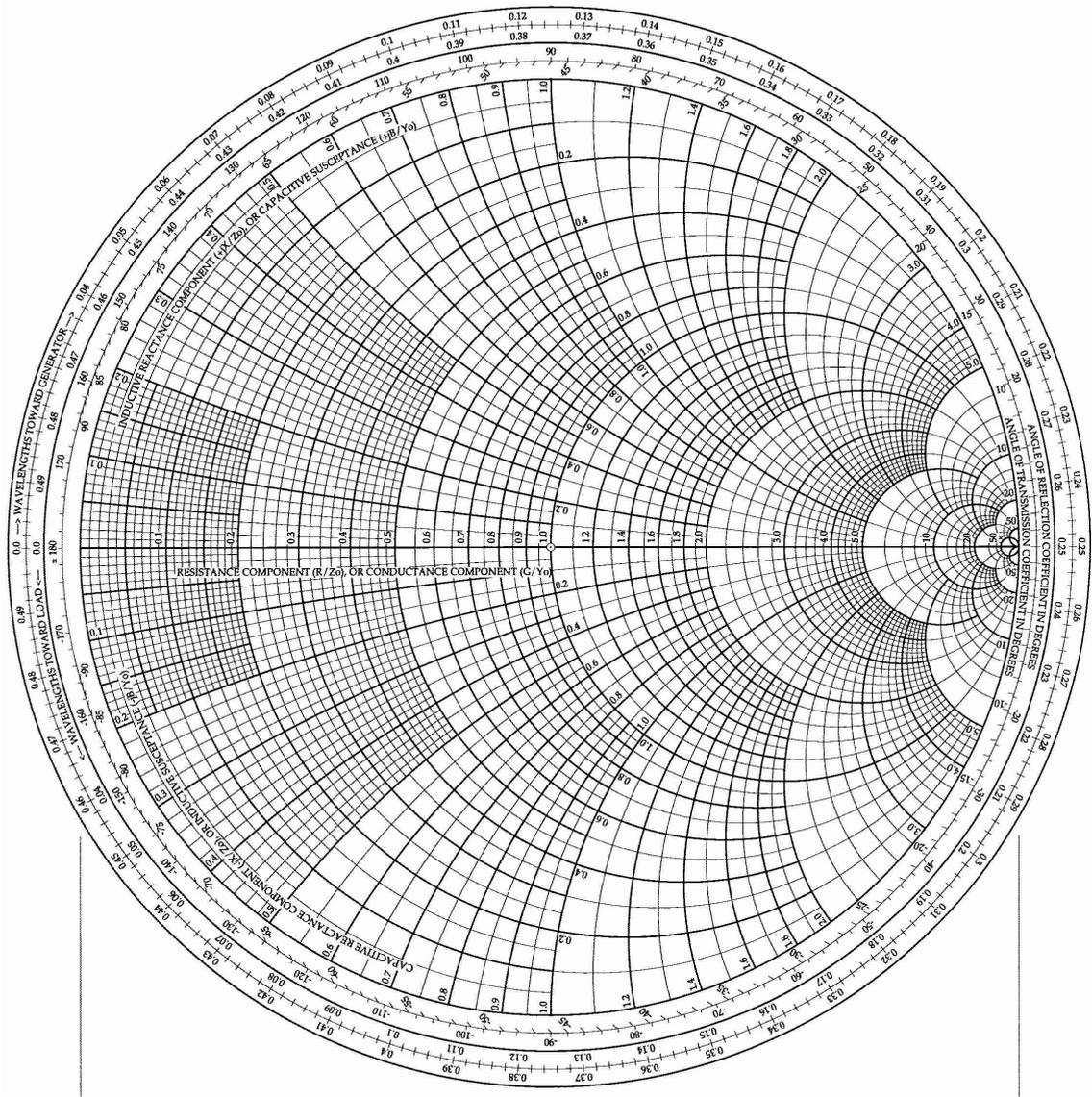


Figura 7: Carta de Smith.

donde ahora el radio es  $1/x$  y el centro se encuentra en  $P[1, 1/x]$ . La superposición de las dos familias de círculos produce la carta de Smith, figura 6.

La carta de Smith permite realizar diferentes operaciones. A partir de un valor del coeficiente de reflexión, podemos calcular la impedancia total de onda normalizada y viceversa. Por ejemplo, si  $\hat{\Gamma} = 0,5 + j0,5$ , entonces observando en la carta de Smith a qué valores de  $r$  y  $x$  corresponde este valor, obtenemos que  $\hat{z} = 1 + j2$  (ver figura 6). Por otro lado, como en general esta carta también incorpora círculos de diferentes radios centrados en el origen, así como una escala angular en su perímetro interior (goniómetro), es posible determinar tanto el módulo como la fase de  $\hat{\Gamma}$  (expresión polar). La figura 7 muestra otro modelo de carta de Smith usado frecuentemente en la práctica profesional.

Las escalas en el borde exterior de la carta de Smith, están asociadas a los cambios en el coeficiente de reflexión debidos a desplazamientos en el eje  $z$ . De acuerdo a la ecuación (31), si la región no tiene pérdidas podemos escribir que

$$\hat{\Gamma}(z') = \hat{\Gamma}(z) e^{2j\beta(z'-z)} = \hat{\Gamma}(z) e^{2(j2\pi/\lambda)(z'-z)}. \quad (51)$$

Observemos que los desplazamientos en  $z$  provocan sólo un cambio de fase en el coeficiente de reflexión, mientras que su módulo permanece constante. Las escalas exteriores tiene en cuenta estos cambios de fase, pues están graduadas en unidades de  $(z' - z)/\lambda$ . Si se pretende calcular un coeficiente de reflexión moviéndose hacia la fuente, entonces hay que rotar en sentido horario un cantidad  $(z' - z)/\lambda$ . Un desplazamiento de media onda equivale a una rotación completa en la carta de Smith. Si la región tiene pérdidas, la diferencia estriba en que al desplazarse por el eje  $z$ , el módulo de  $\hat{\Gamma}(z')$  cambiará: al acercarse a la fuente el coeficiente de reflexión caerá en espiral hacia el origen de coordenadas (es decir, se atenuará).

Resolveremos ahora el mismo problema de la sección anterior, pero esta vez usaremos la carta de Smith. La figura 8 esquematiza los pasos que deben realizarse.

**Solución** (usando la carta de smith).

- Nuevamente partimos de la región 3 y nos movemos hacia la región 1. Allí la impedancia total de campo es  $\hat{Z}_3(0) = \hat{\eta}_3 = 120\pi$  [ $\Omega$ ] y, por continuidad,  $\hat{Z}_2(0) = \hat{Z}_3(0) = 120\pi$  [ $\Omega$ ].
- Si normalizamos la impedancia en la región 2 obtenemos

$$\hat{z}_2(0) = \frac{\hat{Z}_2(0)}{\hat{\eta}_2} = \frac{120\pi}{60\pi} = 2. \quad (52)$$

Por lo tanto, en la interacción que está en  $z = 0$ , tendremos los valores  $r = 2$  y  $x = 0$ .

- En este caso no es necesario calcular el coeficiente de reflexión correspondiente. Sólo debemos determinar la impedancia en la otra interacción desplazándonos hacia la fuente  $(z' - z) = \lambda_2/4$ . Esto equivale a media rotación, la cual nos conduce a un valor de impedancia total de campo normalizada de  $\hat{z}_2(-d_2) = 0,5 + j0$ . Al desnormalizar obtenemos  $\hat{Z}_2(-d_2) = \hat{\eta}_2 \hat{z}_2(-d_2) = 60\pi \times 0,5 = 30\pi$  [ $\Omega$ ].
- La impedancia en esta interacción, pero del lado de la región 1, tiene el mismo valor  $\hat{Z}_1(-d_2) = 30\pi$  [ $\Omega$ ] mientras que su valor normalizado es

$$\hat{z}_1(-d_2) = \frac{\hat{Z}_1(-d_2)}{\hat{\eta}_1} = \frac{30\pi}{120\pi} = 0,25 + j0. \quad (53)$$

Notemos que aunque la impedancia total de campos es continua, su valor normalizado no lo es. De acuerdo a la carta de Smith, este último valor corresponde a un coeficiente de reflexión de  $\hat{\Gamma}_1(-d_2) = -0,6$ .

- Lo que resta del problema se continúa realizando como antes.

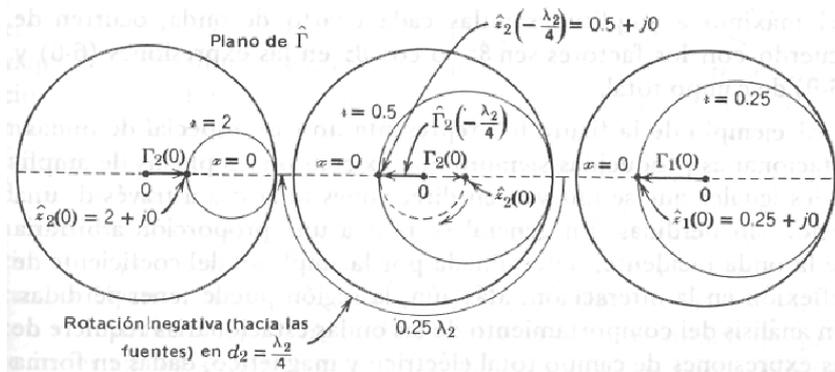


Figura 8: Solución usando la carta de Smith.

## 5. Ondas estacionarias (opcional)

En la sección 1, donde analizamos el problema de incidencia normal de una onda plana sobre una superficie conductora perfecta, se determinó que la onda incidente y la onda reflejada tenían la misma amplitud. Se generaba así una onda estacionaria perfecta que no se propagaba en ninguna dirección. No obstante, en general la reflexión no será total pues los conductores reales tienen una conductividad finita. A continuación analizaremos este tipo de fenómeno.

Consideremos las expresiones de los campos eléctrico y magnético (26) y (28), pero suponiendo que las regiones no tienen pérdidas. En este caso  $\gamma = j\beta$  y  $\hat{\eta} = \eta$  por lo que los campos pueden escribirse como

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{j\beta z} = \hat{E}_m^+ e^{-j\beta z} [1 + \hat{\Gamma}(z)] \quad (54)$$

y

$$\hat{H}_y(z) = \hat{H}_m^+ e^{-j\beta z} + \hat{H}_m^- e^{j\beta z} = \frac{\hat{E}_m^+}{\hat{\eta}} e^{-j\beta z} [1 - \hat{\Gamma}(z)]. \quad (55)$$

Si la reflexión no es total, es decir si el módulo del coeficiente de reflexión es menor que 1, entonces las amplitudes de las ondas incidente y reflejada no serán iguales. La figura 9 muestra un esquema de tiempo real de los campos eléctrico y magnético para una situación de este tipo,

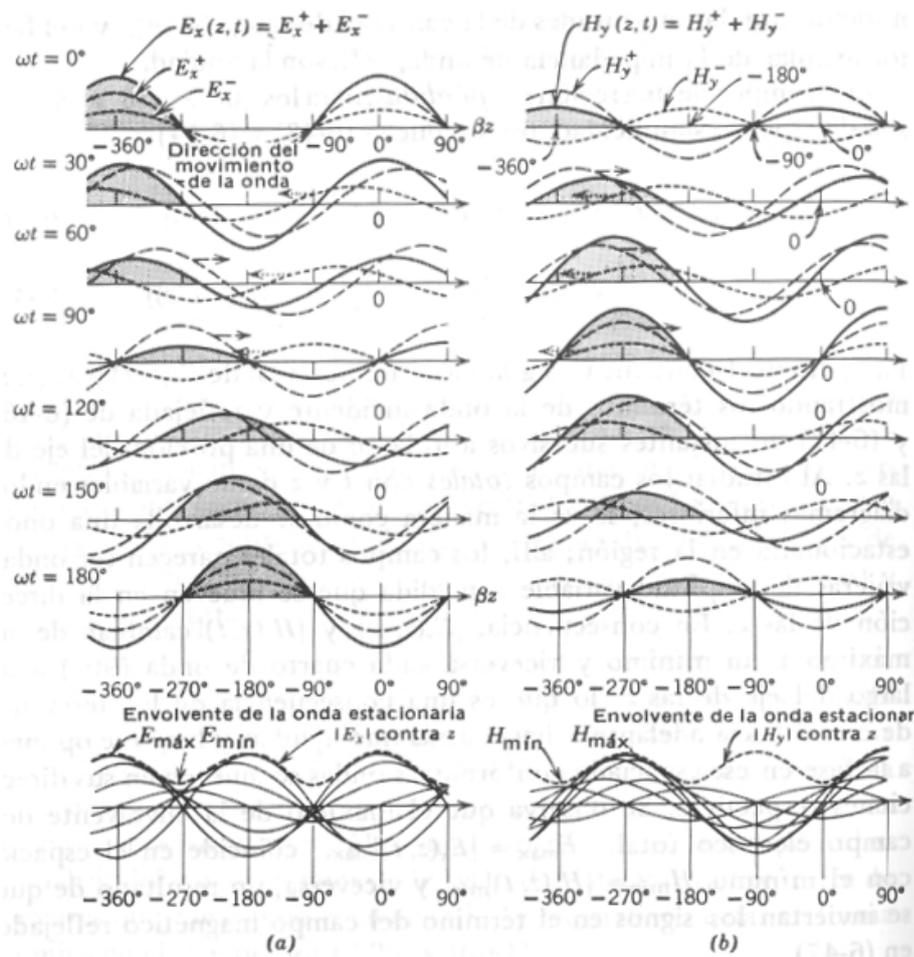


Figura 9: Diagramas de tiempo real de ondas incidentes y reflejadas para diferentes instantes de tiempos. Campos (a) eléctrico y (b) magnético.

en el que una onda que se propaga en el sentido positivo de  $z$  se suma a su reflexión, la cual a su vez está atenuada. Notemos que la señal producida no es una onda estacionaria perfecta sino una onda viajera muy particular: esta se propaga en el sentido positivo de  $z$  variando su amplitud entre dos valores extremos. Para el campo eléctrico estos valores son llamados  $|E_x(z, t)|_{\text{máx}}$  y  $|E_x(z, t)|_{\text{min}}$ . Para caracterizar una situación tal, se define la **relación de onda estacionaria** (ROE) para una región sin pérdidas como

$$\text{ROE} = \frac{|E_x(z, t)|_{\text{máx}}}{|E_x(z, t)|_{\text{min}}} = \frac{E_{\text{máx}}}{E_{\text{min}}}, \quad (56)$$

donde

$$E_{\text{máx}} = |\hat{E}_m^+| + |\hat{E}_m^-| \quad (57)$$

$$E_{\text{min}} = |\hat{E}_m^+| - |\hat{E}_m^-|. \quad (58)$$

De esta forma

$$\text{ROE} = \frac{|\hat{E}_m^+| + |\hat{E}_m^-|}{|\hat{E}_m^+| - |\hat{E}_m^-|} = \frac{|\hat{H}_m^+| + |\hat{H}_m^-|}{|\hat{H}_m^+| - |\hat{H}_m^-|}.$$

Por ejemplo, en el problema dado en la sección 3 el ROE correspondiente a la región 1 es  $\text{ROE} = 160/40 = 4$ . Una onda que se refleje muy poco tendrá un  $\text{ROE} \gtrsim 1$ , mientras que para una reflexión total  $\text{ROE} \rightarrow \infty$ .

Analicemos ahora el problema en término de las expresiones armónicas complejas. Para una región sin pérdidas tenemos que

$$|\hat{E}_x(z)| = |\hat{E}_m^+| |1 + \hat{\Gamma}(z)|. \quad (59)$$

Evidentemente el valor máximo del campo eléctrico sucede cuando es máximo  $|1 + \hat{\Gamma}(z)|$ , donde esta cantidad toma el valor  $1 + |\hat{\Gamma}(z)|$ . Es decir,  $E_{\text{máx}} = |\hat{E}_m^+|(1 + |\hat{\Gamma}(z)|)$ . En forma análoga  $E_{\text{min}} = |\hat{E}_m^+|(1 - |\hat{\Gamma}(z)|)$ . Por lo tanto, es posible escribir que

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\hat{\Gamma}(z)|}{1 - |\hat{\Gamma}(z)|}. \quad (60)$$

Como el rango del módulo del coeficiente de reflexión es  $0 \leq |\hat{\Gamma}(z)| \leq 1$ , el rango de la relación de onda estacionaria será  $1 \leq \text{ROE} < \infty$ . Por ejemplo, para una reflexión del 20 %,  $|\hat{\Gamma}(z)| = 0,2$  y  $\text{ROE} = 1,5$ .

Conociendo el coeficiente de reflexión es fácil determinar el ROE usando la carta de Smith. Primero observemos que, para desplazamientos dentro de un medio sin pérdidas, la función  $\hat{\Gamma}(z)$  describe un círculo en la carta de Smith. Este se conoce como **círculo de ROE** (ver círculos verdes en figura 6). Analizando las figuras 10 (b) y (c) podemos ver que

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\hat{\Gamma}(z)|}{1 - |\hat{\Gamma}(z)|} = \frac{\text{distancia entre los puntos } 0' \text{ y } C}{\text{distancia entre los puntos } 0' \text{ y } D}.$$

Esta es una forma en la cual podemos calcular el ROE. Otra manera más simple es la siguiente. Notemos que en el punto  $C$  de la figura 10 el coeficiente de reflexión es real (ya que  $\Gamma_i = 0$ ) y la impedancia correspondiente también es real (pues  $x = 0$ ). Entonces, para este punto particular, podemos reescribir la ecuación (46) como

$$r = \frac{1 + \Gamma_r}{1 - \Gamma_r} = \frac{1 + |\hat{\Gamma}(z)|}{1 - |\hat{\Gamma}(z)|}. \quad (61)$$

Comparando con (60) vemos que  $\text{ROE} = r$ .

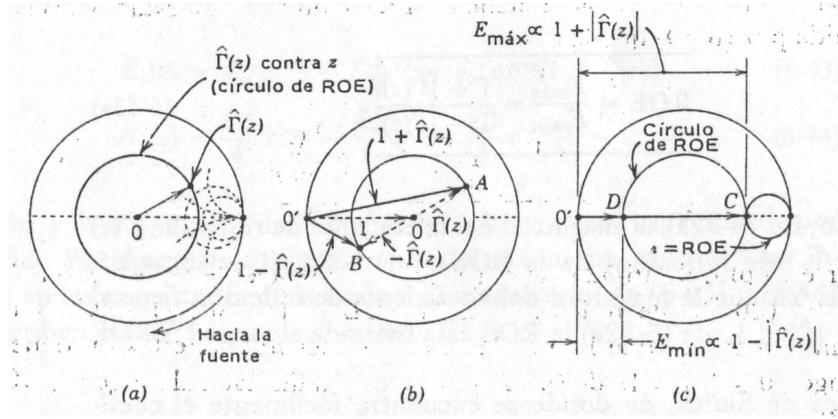


Figura 10: Círculo de ROE.

## 6. Incidencia oblicua de ondas electromagnéticas

En esta sección consideraremos la incidencia oblicua de una onda electromagnética plana monocromática, en un interacción plana que separa dos regiones sin pérdidas. En este caso, haremos uso de todas las condiciones de frontera las cuales nos dicen que las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , así como las componentes normales de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$ , son continuas.

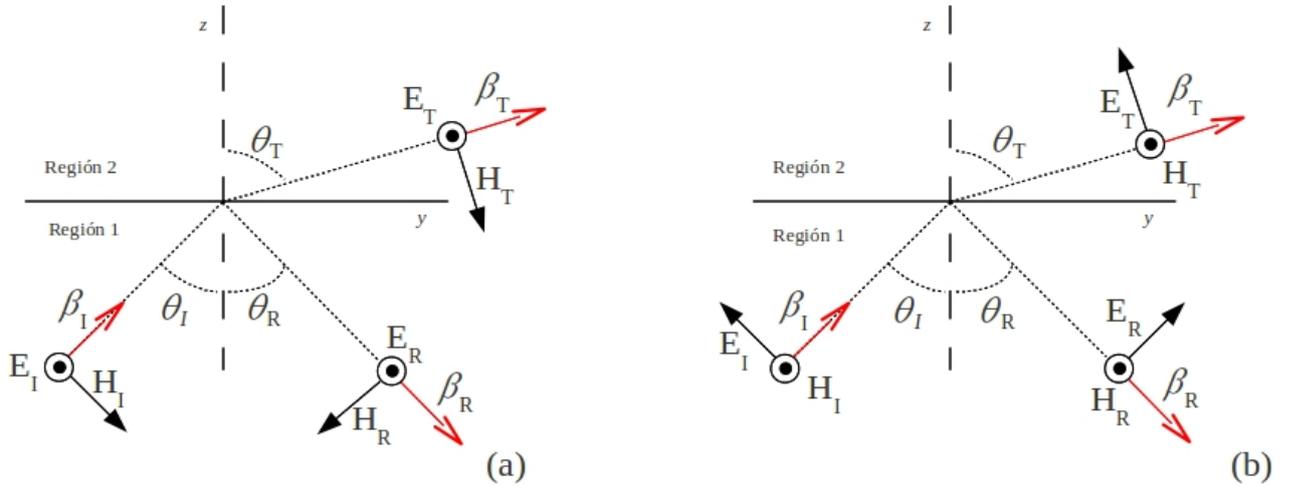


Figura 11: Incidencia oblicua de una onda con (a) el campo eléctrico normal al plano de incidencia y (b) el campo magnético normal al plano de incidencia.

Para satisfacer las condiciones de frontera, nuevamente es necesario tener en cuenta tres ondas: incidente y reflejada en la región 1, y transmitida en la región 2 (ver figura 11). Los campos de la onda incidente se pueden escribir como

$$\hat{\mathbf{E}}_I = \hat{\mathbf{E}}_{I0} e^{j(\beta_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{H}}_I = \hat{\mathbf{H}}_{I0} e^{j(\beta_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (62)$$

los de la onda reflejada como

$$\hat{\mathbf{E}}_R = \hat{\mathbf{E}}_{R0} e^{j(\beta_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{H}}_R = \hat{\mathbf{H}}_{R0} e^{j(\beta_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (63)$$

y los de la onda transmitida como

$$\hat{\mathbf{E}}_T = \hat{\mathbf{E}}_{T0} e^{j(\beta_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{H}}_T = \hat{\mathbf{H}}_{T0} e^{j(\beta_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (64)$$

Como la frecuencia es la misma para todas ellas, entonces podemos escribir que

$$\omega = |\beta_I|v_1 = |\beta_R|v_1 = |\beta_T|v_2 \quad \text{o} \quad |\beta_I| = |\beta_R| = |\beta_T|\frac{v_2}{v_1}. \quad (65)$$

Ahora notemos que al aplicar las condiciones de frontera obtendremos expresiones del tipo

$$(\ ) e^{j(\beta_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\ ) e^{j(\beta_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\ ) e^{j(\beta_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (66)$$

donde los términos del lado izquierdo representan el campo total en la región 1 y el de la derecha en la región 2, mientras que los paréntesis simbolizan las constantes originadas al aplicar dichas condiciones. Este tipo de expresiones se deben satisfacer para todos los tiempos y en todo el plano de la interacción. Como la frecuencia es la misma para todas estas ondas, sólo es necesario que los términos espaciales en los exponentes sean iguales. Por lo tanto, a lo largo del plano de la interacción que suponemos se encuentra en  $z = 0$ , debe satisfacerse que

$$\beta_I \cdot \mathbf{r} = \beta_R \cdot \mathbf{r} = \beta_T \cdot \mathbf{r} \quad (67)$$

o

$$x(\beta_I)_x + y(\beta_I)_y = x(\beta_R)_x + y(\beta_R)_y = x(\beta_T)_x + y(\beta_T)_y. \quad (68)$$

Esta expresión debe cumplirse componente a componente, es decir

$$(\beta_I)_x = (\beta_R)_x = (\beta_T)_x, \quad (69)$$

y

$$(\beta_I)_y = (\beta_R)_y = (\beta_T)_y. \quad (70)$$

Si, como en la figura 11, el vector de fase de la onda incidente  $\beta_I$  está contenido en el plano  $(y, z)$ , entonces a partir de la ecuación (69) se deduce que todos los vectores de onda tendrán una componente nula en la dirección de  $x$ . Por otro lado, de acuerdo a (70) las componentes en la dirección  $y$  serán iguales mientras que en  $z$  serán arbitrarias. Es decir, todos los vectores de fase estarán contenidos en el mismo plano al cual se lo denomina **plano de incidencia**.

Para las componentes a lo largo del eje  $y$  podemos escribir

$$|\beta_I| \text{sen } \theta_I = |\beta_R| \text{sen } \theta_R = |\beta_T| \text{sen } \theta_T. \quad (71)$$

De acuerdo a la ecuación (65) tenemos que  $|\beta_I| = |\beta_R|$  y entonces se deduce que los ángulos de incidencia y reflexión serán iguales

$$\boxed{\theta_I = \theta_R}. \quad (72)$$

Esta expresión es conocida como la **ley de reflexión**. Por otro lado, a partir de (71) también podemos escribir que

$$\frac{\text{sen } \theta_I}{\text{sen } \theta_T} = \frac{|\beta_T|}{|\beta_I|} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}. \quad (73)$$

Definiendo el índice de refracción de un medio como  $n \equiv \sqrt{\mu \epsilon / \mu_0 \epsilon_0} = c/v$ , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\boxed{\frac{\text{sen } \theta_I}{\text{sen } \theta_T} = \frac{n_2}{n_1}}. \quad (74)$$

la cual es conocida como la **ley de Snell**.

Analicemos ahora el caso especial en el cual la onda incide desde la región 1 con el campo eléctrico normal al plano de incidencia. La figura 11 (a) muestra un esquema de esta situación. Usando las formas armónicas complejas y debido a la continuidad de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  tangenciales a la interacción, tenemos que

$$\hat{E}_I + \hat{E}_R = \hat{E}_T \quad (75)$$

y

$$\hat{H}_I \cos \theta_I - \hat{H}_R \cos \theta_R = \hat{H}_T \cos \theta_T. \quad (76)$$

Considerando la impedancia intrínseca de onda de cada región esta última ecuación queda como

$$\frac{\hat{E}_I}{\eta_1} \cos \theta_I - \frac{\hat{E}_R}{\eta_1} \cos \theta_R = \frac{\hat{E}_T}{\eta_2} \cos \theta_T. \quad (77)$$

Tomando en cuenta que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión,  $\theta_I = \theta_R$ , entonces a partir de estas ecuaciones podemos deducir que

$$\boxed{\hat{E}_R = \hat{E}_I \frac{\eta_2 \cos \theta_I - \eta_1 \cos \theta_T}{\eta_2 \cos \theta_I + \eta_1 \cos \theta_T}} \quad (\mathbf{E} \text{ normal al plano de incidencia}), \quad (78)$$

y

$$\boxed{\hat{E}_T = \hat{E}_I \frac{2\eta_2 \cos \theta_I}{\eta_2 \cos \theta_I + \eta_1 \cos \theta_T}} \quad (\mathbf{E} \text{ normal al plano de incidencia}). \quad (79)$$

Notemos que la continuidad de la componente de  $\mathbf{D}$  normal a la interacción se satisface automáticamente pues el campo eléctrico es cero en esta dirección. Por otro lado, la continuidad de la componente de  $\mathbf{B}$  en esta misma dirección conduce a la expresión

$$\begin{aligned} -\hat{B}_I \sin \theta_I - \hat{B}_R \sin \theta_R &= -\hat{B}_T \sin \theta_T \\ -\frac{\mu_1}{\eta_1} \hat{E}_I \sin \theta_I - \frac{\mu_1}{\eta_1} \hat{E}_R \sin \theta_R &= -\frac{\mu_2}{\eta_2} \hat{E}_T \sin \theta_T, \end{aligned} \quad (80)$$

o

$$\frac{\mu_1 \eta_2 \sin \theta_I}{\mu_2 \eta_1 \sin \theta_T} (\hat{E}_I + \hat{E}_R) = \hat{E}_T. \quad (81)$$

Como  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , de acuerdo a la ley de Snell (74) vemos que la ecuación anterior es equivalente a la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico dada por (75).

Ahora supongamos que el campo magnético está polarizado normal al plano de incidencia, mientras que el campo eléctrico es paralelo a dicho plano. La figura 11 (b) muestra un esquema de esta situación. La continuidad de las componentes tangenciales a la interacción conduce a

$$-\hat{E}_I \cos \theta_I + \hat{E}_R \cos \theta_R = -\hat{E}_T \cos \theta_T \quad (82)$$

y

$$\hat{H}_I + \hat{H}_R = \hat{H}_T. \quad (83)$$

Esta última ecuación puede escribirse como

$$\frac{\hat{E}_I}{\eta_1} + \frac{\hat{E}_R}{\eta_1} = \frac{\hat{E}_T}{\eta_2}. \quad (84)$$

Tomando en cuenta nuevamente que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, a partir de estas ecuaciones podemos deducir que

$$\boxed{\hat{E}_R = \hat{E}_I \frac{\eta_1 \cos \theta_I - \eta_2 \cos \theta_T}{\eta_1 \cos \theta_I + \eta_2 \cos \theta_T}} \quad (\mathbf{H} \text{ normal al plano de incidencia}), \quad (85)$$

y

$$\boxed{\hat{E}_T = \hat{E}_I \frac{2\eta_2 \cos \theta_I}{\eta_1 \cos \theta_I + \eta_2 \cos \theta_T}} \quad (\mathbf{H} \text{ normal al plano de incidencia}). \quad (86)$$

Como el campo magnético no tiene componente normal a la interacción, su continuidad se satisface automáticamente. Por otro lado, la continuidad de  $\mathbf{D}$  en esta misma dirección más la ley de Snell nos dan una ecuación idéntica a la de continuidad del campo magnético tangencial a la superficie.

Un caso particular es cuando  $\mu_1 = \mu_2$ , para el cual la ley de Snell se puede escribir como

$$\frac{\text{sen } \theta_I}{\text{sen } \theta_T} = \frac{\eta_1}{\eta_2}. \quad (87)$$

Entonces las ecuaciones (78), (79), (85) y (86) se transforman en:

1) Campo  $\mathbf{E}$  normal al plano de incidencia

$$\hat{E}_R = -\hat{E}_I \frac{\text{sen}(\theta_I - \theta_T)}{\text{sen}(\theta_I + \theta_T)} \quad (88)$$

$$\hat{E}_T = \hat{E}_I \frac{2 \cos \theta_I \text{sen } \theta_T}{\text{sen}(\theta_I + \theta_T)}. \quad (89)$$

2) Campo  $\mathbf{H}$  normal al plano de incidencia

$$\hat{E}_R = \hat{E}_I \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)} \quad (90)$$

$$\hat{E}_T = \hat{E}_I \frac{2 \cos \theta_I \text{sen } \theta_T}{\text{sen}(\theta_I + \theta_T) \cos(\theta_I - \theta_T)}. \quad (91)$$

Hay dos aspectos que pueden ser resaltados. El primero es que cuando el campo eléctrico está polarizado en el plano de incidencia (y el campo  $\mathbf{H}$  es normal a este plano), entonces existe un ángulo de incidencia denominado **ángulo de Brewster** para el que no hay onda reflejada. De hecho, observando la ecuación (90), vemos que esto sucede para  $\theta_T + \theta_I = \pi/2$ . Como  $\text{sen } \theta_T = \text{sen}(\pi/2 - \theta_I) = \cos \theta_I$  entonces, usando la ley de Snell (74), vemos que el ángulo de Brewster  $\theta_B$  está dado por

$$\boxed{\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}. \quad (92)$$

Podemos deducir que una onda plana arbitraria (cuya polarización tenga componentes normales y paralelas al plano de incidencia) que incide en el ángulo de Brewster, producirá una onda reflejada con un campo eléctrico polarizado normal al plano de incidencia.

El segundo fenómeno a considerar es el de **reflexión total interna**. Supongamos que la onda incidente proviene de un medio 1 cuyo índice de refracción es mayor que el del medio en

el que se transmite,  $n_1 > n_2$ . La ley de Snell (74) nos dice que existirá un ángulo de incidencia crítico,  $\theta_{Ic}$ , para el cual el ángulo  $\theta_T = \pi/2$ . Es decir

$$\boxed{\theta_{Ic} = \text{arc sen} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)}. \quad (93)$$

Para este ángulo de incidencia la onda transmitida se propagará paralela a la interacción y no habrá transferencia de energía de un región a otra. Es decir, toda la energía será reflejada en un ángulo  $\theta_R = \theta_I$ . Para  $\theta_I > \theta_{Ic}$  se puede demostrar que la onda transmitida seguirá teniendo una dirección paralela a la interacción pero, debido a que el factor de propagación tendrá sólo una parte real, esta será una onda desvanecente (ver Unidad 6, Guías de ondas) que se atenuará rápidamente en un tramo de unas pocas longitudes de onda. Este es el principio que permite que una **fibra óptica** transporte una señal de luz sin atenuarse apreciablemente a lo largo de grandes distancias. En la Unidad 8 estudiaremos tales sistemas.

## 7. Reflexión de una onda en tierra

La reflexión de una onda en tierra corresponde al caso de incidencia sobre un medio conductor. Para analizar este caso emplearemos las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, las cuales fueron deducidas para el caso de dos medios sin pérdidas. Sin embargo, se puede demostrar que haciendo la sustitución  $\eta \rightarrow \hat{\eta}$ , estas expresiones también son válidas para medios con pérdidas [9].

Si la incidencia es normal, entonces a partir de (78) tenemos que

$$\frac{\hat{E}_R}{\hat{E}_I} = \frac{\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1}, \quad (94)$$

donde  $\hat{\eta}_1$  y  $\hat{\eta}_2$  son, respectivamente, las impedancias intrínsecas de onda del aire y de la tierra. Como ya hemos visto antes  $\hat{\eta}_1 = 120\pi = 377 \text{ } [\Omega]$ . Por otro lado, tomando para la tierra los parámetros  $\mu_2 = \mu_0$ ,  $\epsilon_2 = 25\epsilon_0$  y  $\sigma_2 = 10^{-2} \text{ } [\frac{1}{\Omega\text{m}}]$ , y suponiendo una frecuencia de  $\nu = 10^7 \text{ } [\text{Hz}]$ , obtenemos  $\hat{\eta}_2 = 68 e^{j18^\circ} \text{ } [\Omega]$ . Entonces para este caso el cociente entre las amplitudes será

$$\frac{\hat{E}_R}{\hat{E}_I} = -0,705 e^{j6,6^\circ}. \quad (95)$$

La ecuación anterior indica que la onda reflejada tiene una amplitud igual al 70 % de la amplitud de la onda incidente. Es decir, hay una pérdida significativa pues una fracción importante de la energía se transmite a la tierra. Además, observemos que la diferencia de fase es de casi  $\pi$  [rad].

Por otro lado, si la incidencia es rasante, entonces la diferencia de fase se acercará a  $\pi$  y la onda se reflejará casi completamente. Para ver esto, tomemos el ángulo de incidencia  $\theta_I \approx \pi/2$  y supongamos que el ángulo de transmisión es menor a este valor (esto es lógico pues la tierra es más densa que el aire). A partir de (78) obtenemos que

$$\frac{\hat{E}_R}{\hat{E}_I} \approx -1. \quad (96)$$

El resultado anterior es válido para ambos tipos de polarización. Vemos ahora que la reflexión es casi total ya que la onda pierde muy poca energía.

## 8. Reflexión de una onda en la ionósfera

La ionósfera es una región de la atmósfera que está situada aproximadamente entre los 80 km y 500 km de altitud. Es una capa que se encuentra ionizada permanentemente debido a las colisiones entre las moléculas del aire y los fotones provenientes de la radiación de solar. Debido a que la densidad es muy baja, se puede suponer que la probabilidad de que sucedan colisiones es despreciable y por lo tanto las partículas cargadas (iones y electrones) se comportarán como si estuvieran libres. A este sistema tan simple se lo conoce como **modelo de plasma diluido**. Determinaremos ahora el comportamiento de una onda electromagnética en este medio tan especial, considerando sólo la contribución de los electrones libres (más adelante veremos que los efectos debidos a los iones más pesados pueden ser despreciados).

Como la densidad en este plasma es tan baja como para despreciar las colisiones interatómicas, entonces el campo eléctrico de una onda electromagnética acelerará a los electrones libres sin la oposición de una fuerza de fricción. Para describir el comportamiento básico de este sistema, consideremos un modelo unidimensional en el cual las partículas sólo pueden moverse a lo largo del eje  $x$ . Si la polarización de una onda electromagnética de frecuencia  $\omega$  está en esta dirección, entonces en un punto fijo del espacio tendremos que el campo eléctrico complejo es

$$\hat{E}_x = \hat{E}_0 e^{j\omega t}. \quad (97)$$

El movimiento de un electrón puede describirse entonces a través de la segunda ley de Newton

$$m \frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} = q \hat{E}_x = q \hat{E}_0 e^{j\omega t}, \quad (98)$$

donde  $m$  y  $q$  son, respectivamente, la masa y la carga de esta partícula, y  $q \hat{E}_x$  es la fuerza aplicada. Integrando esta expresión una vez con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad del electrón

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{q}{jm\omega} \hat{E}_x = -j \frac{q}{m\omega} \hat{E}_x. \quad (99)$$

Si ahora suponemos que en el plasma hay una densidad  $n$  de electrones libres por unidad de volumen, entonces la densidad de corriente estará dada por

$$\hat{J}_x = nq \frac{d\hat{x}}{dt} = -j \frac{nq^2}{m\omega} \hat{E}_x. \quad (100)$$

La generalización de esta expresión a tres dimensiones se puede escribir como

$$\boxed{\hat{\mathbf{J}} = \left( -j \frac{nq^2}{m\omega} \right) \hat{\mathbf{E}}}, \quad (101)$$

ecuación que muestra que la corriente está atrasada respecto al campo. Esta expresión es equivalente a la ley de Ohm, donde el término entre paréntesis se comporta como una conductividad que en este caso es imaginaria pura.

Para entender cómo se comportan los campos dentro de este plasma diluido, sólo tenemos que plantear las ecuaciones de Maxwell con la densidad de corriente dada por (101). Suponiendo que el medio es lineal y tiene una permitividad  $\epsilon$ , las leyes de Faraday y Ampère se escribirán como

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}} \quad (102)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}} + j\omega\hat{\mathbf{D}} = \left( -j \frac{nq^2}{m\omega} + j\omega\epsilon \right) \hat{\mathbf{E}}. \quad (103)$$

Como hemos visto anteriormente, combinando estas dos expresiones podemos obtener las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \Lambda^2 \hat{\mathbf{E}} \quad (104)$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} = \Lambda^2 \hat{\mathbf{H}}, \quad (105)$$

donde

$$\Lambda = \omega \sqrt{-\mu\epsilon \left(1 - \frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2}\right)} \quad (106)$$

es el **factor de propagación** en un medio ionizado. Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales correspondientes a ondas planas que se propagan en la dirección  $z$  son (con los campos eléctrico y magnético polarizados en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente)

$$\hat{E}_x = \hat{E}_x^+ e^{j\omega t - \Lambda z} \quad (107)$$

$$\hat{H}_y = \hat{H}_y^+ e^{j\omega t - \Lambda z}. \quad (108)$$

A su vez, la impedancia intrínseca de onda se puede encontrar a partir de su definición

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{E}_x^+}{\hat{H}_y^+} = \frac{j\omega\mu}{\Lambda} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \left(1 - \frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2}\right)}}. \quad (109)$$

Notemos ahora que  $\Lambda$  puede ser real o imaginario puro, pero nunca complejo. Si lo reescribimos como  $\Lambda = j\beta$ , donde

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon \left(1 - \frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2}\right)}, \quad (110)$$

entonces los campos podrán expresarse como

$$\hat{E}_x = \hat{E}_x^+ e^{j\omega t - j\beta z} \quad (111)$$

$$\hat{H}_y = \hat{H}_y^+ e^{j\omega t - j\beta z}. \quad (112)$$

Podemos distinguir dos casos. Si

$$\frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2} < 1, \quad (113)$$

entonces  $\beta$  será real y la onda se propagará con esta número de onda y sin atenuarse. Esta situación se dará en las regiones poco ionizadas (donde  $n$  es pequeño) o para ondas de muy alta frecuencia. Por el contrario si

$$\frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2} > 1, \quad (114)$$

$\beta$  será imaginario puro y la solución ya no describe una onda que se propaga, sino una pulsación que se atenúa y que está en fase en toda la región. De esta forma, una onda podrá alcanzar una cierta altura a partir de la cual la densidad de electrones ya no permitirá la propagación de esta señal, y por lo tanto la onda será reflejada hacia la tierra. Como la densidad aumenta con la altura, las señales de baja frecuencia se reflejarán en las capas inferiores de la ionósfera y las de mayor frecuencia penetrarán más alto e incluso se transmitirán al espacio vacío.

Para caracterizar este fenómeno, a partir de la igualdad

$$\frac{nq^2}{m\epsilon\omega_c^2} = 1 \quad (115)$$

se define una **frecuencia crítica** como

$$\nu_c = 2\pi\omega_c = \frac{2\pi q}{\sqrt{m\epsilon}}\sqrt{n}. \quad (116)$$

Usando los valores de la permitividad del vacío, la masa y la carga del electrón obtenemos

$$\boxed{\nu_c \approx 9\sqrt{n}}. \quad (117)$$

Para  $\nu < \nu_c$  ( $\nu > \nu_c$ ) la onda se reflejará (transmitirá). Notemos que, como un ion positivo tiene una masa mucho más grande que la de un electrón (unas 1840 veces mayor), la contribución de estas partículas cargadas a la frecuencia crítica puede despreciarse.

Finalmente, algo importante que debemos destacar es el comportamiento de la velocidad de fase en una región ionizada

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon\left(1 - \frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2}\right)}}. \quad (118)$$

Si  $n \approx 0$ , esta cantidad será similar a la velocidad de propagación en un medio dieléctrico  $v_p \approx 1/\sqrt{\mu\epsilon} < c$ . Sin embargo, si la densidad comienza a crecer, la velocidad de fase aumentará e incluso tenderá a infinito en el límite en el cual  $n$  tienda a su valor crítico (justo cuando el valor de  $\beta$  pasa de ser real a imaginario puro). No obstante, la velocidad de grupo  $v_g$  se mantendrá menor que la velocidad de la luz en el medio. Para ver esto consideremos que

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(1 - \frac{nq^2}{m\epsilon\omega^2}\right)}. \quad (119)$$

Podemos apreciar que, mientras  $n$  se mantenga por debajo de su valor crítico, esta velocidad será menor que  $1/\sqrt{\mu\epsilon}$  (por arriba del valor crítico de la densidad, la onda ni siquiera se propagará). Una relación importante entre las velocidades de fase y de grupo es  $v_p v_g = c_d^2$ , donde  $c_d = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  es la velocidad de propagación de la luz en el medio dieléctrico.

## Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).
- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).
- [7] M. I. Prieto and M. Quintillán, *Am. J. Phys.* **57**, 277 (1989).
- [8] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, **Finite Element Method for Electromagnetics**. IEEE Press (1998).
- [9] S. J. Orfanidis, **Electromagnetic Waves and Antennas**. Rutgers University (1999).

# Problemas

1. Completar el problema de tres regiones analizado en la sección 3. En especial:
  - a) Determinar el valor de todas las amplitudes de onda. Para las ondas en la región 1, tomar como origen de coordenadas la interacción entre 1-2, y para las ondas en las regiones 2 y 3, fijar el origen en la interacción 2-3.
  - b) Escribir las expresiones de tiempo real de cada una de estas ondas.
  - c) Realizar los dos puntos anteriores, pero esta vez tomando la interacción 2-3 como único origen de coordenadas.
  - d) ¿Cuál es la diferencia entre las dos expresiones de tiempos real obtenidas?
2. Una onda plana de frecuencia  $\nu = 10[\text{MHz}]$  y amplitud  $100[\text{V/m}]$  que se propaga en el aire, incide normalmente sobre una pieza dieléctrica plana con permitividad  $\epsilon_2 = 6\epsilon_0$  y espesor  $d_2 = \frac{3}{8}\lambda_2$ , la cual está apoyada sobre una lámina conductora perfecta. Suponiendo que las permeabilidades de todas las regiones son iguales a la del vacío, se pide:
  - a) Determinar las amplitudes de las ondas en cada región.
  - b) ¿Qué espesor en metros tiene la pieza central?
3. Supongamos que un sistema como el de la figura 4, donde el material central tiene un espesor de un cuarto de longitud de onda ( $d_2 = \lambda_2/4$ ), está formado por tres regiones con diferentes impedancias intrínsecas. Determinar la relación que deben cumplir estas impedancias para que no exista una onda reflejada en la región 1.
4. En un sistema de tres regiones como el de la figura 4, donde los medios 1 y 3 son iguales, determinar el espesor mínimo que debería tener la pieza central para que no exista una onda reflejada en la región 1. Suponga que la región 2 tiene una impedancia intrínseca de onda arbitraria.
5. Un radar que opera a una frecuencia de  $\nu = 2[\text{GHz}]$ , está protegido por un domo de material dieléctrico cuya permitividad es  $\epsilon = 4\epsilon_0$ . ¿Qué espesor debe tener el domo para que sea transparente a las ondas del radar?. Justifique su respuesta.
6. Determinar el ángulo máximo  $\alpha_{\text{max}}$  de incidencia para que un rayo de luz que ingresar en el extremo de una fibra óptica, se propague dentro de la fibra realizando reflexiones totales internas (ver figura 12). Considere que el índice de refracción del medio es  $n_2$  y el de la fibra  $n_1$ , con  $n_1 > n_2$ .



Figura 12: Fibra óptica del problema 6

7. Si el índice de refracción del agua de un lago es de  $n = 1,33$ , ¿cuánto vale el ángulo de Brewster para la luz proveniente del sol?.
8. En un experimento se encuentra que una onda electromagnética de hasta  $\nu = 4[\text{MHz}]$  se refleja en la ionósfera a una altura de 300 km. ¿Cuánto vale la densidad de electrones libres a esta altura?.