

# Unidad 9

## Radiación electromagnética y antenas

28 de febrero de 2019

Como vimos en las unidades anteriores, las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas. A diferencia de otras soluciones posibles, estos campos representan la propagación de energía en un medio. Otra de las cosas que también aprendimos, fue que es posible confinar a las ondas electromagnéticas en un medio material como el de una guía de ondas, tanto hueca como de dos conductores, e incluso dieléctrica (fibra óptica).

En esta unidad nos concentraremos en analizar cómo son producidos estos campos los cuales se conocen como **campos de radiación**, y cuáles son sus principales características. También estudiaremos los fundamentos básicos de las **antenas**, dispositivos que en la práctica son empleados para emitir y recibir señales electromagnéticas.

### 1. Campos dependientes del tiempo

En esta sección deduciremos las ecuaciones inhomogéneas de onda para los potenciales electromagnéticos. Éstas nos serán útiles para describir el fenómeno de radiación electromagnética.

Incluso para campos que dependen del tiempo, siempre es válida la ecuación de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Debido a que la divergencia del rotor de un campo vectorial siempre es cero, como vimos en la Unidad 3 es posible definir un **potencial vectorial** a través de la relación

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}. \quad (1)$$

Por otro lado, como en general  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$  (ley de Faraday), entonces no podemos escribir al campo eléctrico como el gradiente de una función potencial escalar. Sin embargo, usando (1) es posible reescribir la ley de Faraday como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t}, \quad (2)$$

o

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3)$$

La relación anterior nos dice que el rotor de la expresión que está entre paréntesis siempre es cero y por lo tanto puede ser escrita como el gradiente de una función potencial escalar

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi. \quad (4)$$

De esta forma, el campo eléctrico puede ser expresado como función de ambos potenciales

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}. \quad (5)$$

El primer término corresponde a la contribución de las densidades de carga y el segundo es debido a las densidades de corriente.

Considerando la expresión (1), notemos que el campo magnético  $\mathbf{B}$  no cambia si al potencial vectorial se le suma el gradiente de una función escalar

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda. \quad (6)$$

Esto es así debido a que  $\nabla \times (\nabla\Lambda) = 0$ . Para mantener inalterado el campo eléctrico (5), un cambio de este tipo requiere modificar simultáneamente el potencial escalar adicionando un nuevo término

$$\Phi' = \Phi - (\partial\Lambda/\partial t). \quad (7)$$

Vemos entonces que existe una cierta libertad para elegir los potenciales. Para que el par de campos  $\mathbf{A}$  y  $\Phi$ , o el par  $\mathbf{A}'$  y  $\Phi'$ , representen la misma situación física (los mismos campos electromagnéticos), la premisa es que ambos respeten las expresiones (6) y (7). Estas ecuaciones representan la denominada **transformación de gauge** (o transformación de la medida).

A partir de las ecuaciones de Maxwell es posible encontrar ecuaciones diferenciales para estos potenciales. Usando las expresiones (1) y (5), y suponiendo que el medio es lineal, la ley de Ampère puede escribirse como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu\mathbf{J} + \mu\epsilon \left[ -\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right]. \quad (9)$$

Si consideremos ahora la identidad  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ , la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\left( \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu\mathbf{J}. \quad (10)$$

Por otro lado, la ley de Gauss para el campo de desplazamiento también puede escribirse en función de los potenciales

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (11)$$

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (12)$$

Consideremos ahora el teorema de unicidad dado en la Unidad 1, el cual nos dice que un campo vectorial queda determinado si se conoce su rotacional y su divergencia en todo el espacio. En el caso particular de  $\mathbf{A}$ , hemos impuesto que su rotacional sea igual al campo magnético  $\mathbf{B}$ , ecuación (1). Sin embargo, nada hemos dicho acerca de su divergencia. De hecho, en forma arbitraria podemos elegir que

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}}. \quad (13)$$

A la relación anterior se la denomina la **condición de Lorentz**. Si esta condición es elegida para reescribir las ecuaciones de Maxwell, se dice que estamos trabajando en la **medida de Lorentz**. Notemos que la relación (13) aunque se ha introducido en forma arbitraria, es equivalente a la elección de un determinado campo escalar  $\Lambda$  (es fácil demostrar que en este caso la función  $\Lambda$  tiene que ser solución de una ecuación de onda homogénea). Usando ahora la condición de Lorentz podemos reescribir las ecuaciones (10) y (12) como

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} \quad (14)$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (15)$$

Estas son ecuaciones de onda inhomogéneas. En condiciones estáticas tenemos que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (16)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (17)$$

Para este caso particular, anteriormente en la Unidad 3 hemos visto que es posible expresar ambos potenciales en función de las fuentes

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (18)$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (19)$$

En lugar de la condición de Lorentz (13), otra posibilidad podría haber sido elegir

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}. \quad (20)$$

A la relación anterior se la denomina la **condición de Coulomb**. Trabajando con esta medida las ecuaciones (10) y (12) se pueden reescribir como

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\epsilon \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J} \quad (21)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (22)$$

Notemos que en este caso, tanto para condiciones estáticas como dinámicas, el potencial escalar estará dado siempre por la integral (18). Sin embargo, la ecuación diferencial que debe cumplir el potencial  $\mathbf{A}$  es más complicada. Por este motivo en lo que sigue continuaremos trabajando en la medida de Lorentz.

En general las densidades de carga y corriente pueden depender tanto de las variables espaciales como del tiempo. Es decir,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ . Ya que la velocidad de propagación de una perturbación electromagnética es finita, es lógico suponer que las soluciones de las ecuaciones de onda (14) y (15) pueden estar dadas por [2, 6]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (23)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (24)$$

donde

$$t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \quad (25)$$

es el denominado **tiempo retardado** y  $c$  es la velocidad de la luz (usamos aquí la letra  $c$  para indicar la velocidad de la luz en cualquier medio, pues  $v$  hace referencia a un volumen). Más precisamente, las expresiones (24) y (23) sugieren que los potenciales en un dado punto  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$  se pueden escribir como en el caso estático, sólo que las contribuciones de las densidades (de carga y corriente) para un punto  $\mathbf{r}'$  deben evaluarse en tiempos anteriores que dependen de la posición como  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ . Por este motivo se los denomina **potenciales retardados**. Reemplazando (25) en (24) y (23) obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (26)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (27)$$

Demostremos [6] ahora que la integral (27) es solución de la ecuación diferencial de onda (15) [como la solución para cada componente de  $\mathbf{A}$  tiene una forma similar a (27) y las ecuaciones diferenciales de onda (14) y (15) son idénticas, entonces simultáneamente estaremos probando que (26) también es una solución válida de (14)]. Comenzamos tomando el gradiente de (27)

$$\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla\rho_v + \rho_v \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dv'. \quad (28)$$

Notemos que  $\nabla$  sólo opera sobre  $\mathbf{r}$ . Es fácil ver que

$$\nabla\rho_v = \dot{\rho}_v \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho}_v \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (29)$$

donde el punto representa una diferenciación respecto al tiempo (notemos que  $\partial/\partial t_r = \partial/\partial t$ ). Como además

$$\nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{y} \quad \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (30)$$

entonces (28) puede reescribirse como

$$\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left[ -\frac{\dot{\rho}_v}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \rho_v \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv'. \quad (31)$$

Si ahora tomamos la divergencia de la ecuación anterior obtenemos

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ -\frac{1}{c} \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot (\nabla\dot{\rho}_v) + \dot{\rho}_v \nabla \cdot \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \right] - \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\nabla\rho_v) + \rho_v \nabla \cdot \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] \right\} dv', \quad (32)$$

donde hemos usado la identidad  $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$ . Como

$$\nabla\dot{\rho}_v = -\frac{1}{c} \ddot{\rho}_v \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\frac{1}{c} \ddot{\rho}_v \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (34)$$

y

$$\nabla \cdot \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (35)$$

(la última ecuación se puede demostrar observando que el término entre paréntesis representa el campo eléctrico de una carga puntual situada en  $\mathbf{r}'$ ), la integral (32) se puede reescribir como

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}_v}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 4\pi\rho_v\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (36)$$

Considerando que  $c^2 = 1/\mu\epsilon$  vemos que la expresión anterior confirma que la integral (27) es solución de la ecuación diferencial de onda (15). Notemos que sólo hay inconvenientes al calcular las derivadas espaciales de los potenciales. Las derivadas temporales se pueden intercambiar con la operación de integración sin problemas. Esto se debe a que derivar las densidades respecto al tiempo o al tiempo retardado conduce al mismo resultado.

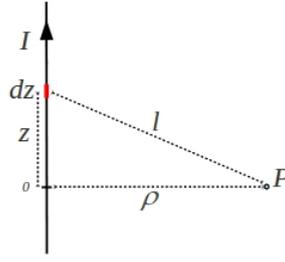


Figura 1: Cable conductor infinito que a  $t = 0$  empieza a conducir una corriente estacionaria.

Veamos un ejemplo. Supongamos que a  $t = 0$  iniciamos en forma abrupta una corriente estacionaria en un cable conductor de longitud infinita. La expresi3n para esta corriente ser3

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ I_0 & \text{para } t > 0 \end{cases} .$$

Determinaremos ahora los campos el3ctrico y magn3tico resultantes. En primer lugar consideremos que el conductor es el3ctricamente neutro. Esto implica que no hay una densidad de carga y, a partir de (27), vemos que el potencial escalar ser3 cero. S3lo hay una densidad de corriente y por lo tanto existir3 un potencial vectorial. La figura 1 muestra un esquema donde se ha supuesto que la corriente circula en el sentido positivo de  $z$ . El potencial vectorial retardado (26) en el punto  $P$  ser3

$$\mathbf{A}(\rho, t) = \mathbf{a}_z \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{l} dz. \quad (37)$$

Para  $t < \rho/c$  este potencial ser3 cero, pues al punto  $P$  a3n no habr3 llegado la noticia de que la corriente empez3 a fluir. Por otro lado, para  $t > \rho/c$ , s3lo los puntos dentro del segmento

$$z \leq \pm \sqrt{(ct)^2 - \rho^2} \quad (38)$$

contribuir3n a la integral (37). De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho, t) &= \mathbf{a}_z \frac{\mu I_0}{4\pi} 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \\ &= \mathbf{a}_z \frac{\mu I_0}{2\pi} \ln \left( \sqrt{z^2 + \rho^2} + z \right) \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \\ &= \mathbf{a}_z \frac{\mu I_0}{2\pi} \ln \left( \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

El campo el3ctrico ser3

$$\mathbf{E}(\rho, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{a}_z \frac{\mu I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \quad (40)$$

y el magn3tico

$$\mathbf{B}(\rho, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{a}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I_0}{2\pi \rho} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}. \quad (41)$$

Notemos que cuando  $t \rightarrow \infty$  recuperamos el caso est3tico,  $\mathbf{E} = 0$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi (\mu_0 I_0 / 2\pi \rho)$ .

Aunque los potenciales (26) y (27) evaluados en el tiempo retardado lucen idénticos a los potenciales correspondientes a distribuciones de cargas y corrientes estacionarias, las expresiones de los campos eléctrico y magnético son diferentes. Para calcular  $\mathbf{E}$  podemos proceder como sigue. Teniendo en cuenta la integral (26) vemos que

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (42)$$

Entonces, como el campo eléctrico está dado por la ecuación (5), a partir de (31) y (42) obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left[ \rho_v(\mathbf{r}', t_r) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dot{\rho}_v(\mathbf{r}', t_r) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r) \frac{1}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv'. \quad (43)$$

Por otro lado, para determinar el campo magnético sólo es necesario calcular el rotacional de la ecuación (26). Siguiendo un procedimiento algebraico similar al anterior obtenemos (ver detalles en la referencia [6])

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r) \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'. \quad (44)$$

Las expresiones (43) y (44), conocidas como **ecuaciones de Jefimenko**, se reducen al caso estático (ecuaciones de Coulomb y de Biot Savart) cuando las fuentes no dependen del tiempo. Notemos que no son simplemente las integrales del caso estático evaluadas en un tiempo retardado. Nuevos términos surgen involucrando derivadas temporales de las fuentes que producen los campos.

No obstante, al analizar las expresiones anteriores para dos casos particulares, surgen expresiones ya conocidas. Si la densidad de corriente fuera constante entonces tendríamos que  $\dot{\mathbf{J}} = 0$ . De acuerdo a la ecuación de continuidad, esto implica que la primera derivada temporal de la densidad de carga será constante. Como las derivadas de orden superior son cero, podemos escribir la expansión de Taylor como

$$\rho_v(\mathbf{r}', t_r) = \rho_v(\mathbf{r}', t) + (t_r - t)\dot{\rho}_v(\mathbf{r}', t). \quad (45)$$

Introduciendo la expresión anterior en (43) obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left[ \rho_v(\mathbf{r}', t) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dot{\rho}_v(\mathbf{r}', t) \frac{(t_r - t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dot{\rho}_v(\mathbf{r}', t_r) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dv'. \quad (46)$$

Teniendo en cuenta que  $t_r - t = -|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  y que la derivada temporal de la densidad es contante,  $\dot{\rho}_v(\mathbf{r}', t) = \dot{\rho}_v(\mathbf{r}', t_r) = \dot{\rho}_v(\mathbf{r}')$ , la expresión anterior se puede reescribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}', t) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv', \quad (47)$$

la cual es idéntica a la expresión de Coulomb. Aunque las fuentes estén cambiando en el tiempo, por una simple cancelación de términos, la ecuación (47) nos dice que en la práctica aún podemos calcular los campos suponiendo un efecto instantáneo de las cargas (por supuesto se supone que el campo se está evaluando en un punto del espacio al cual ya ha llegado la información de que las densidades están variando en el tiempo). Por otro lado, una compensación similar para el campo magnético es encontrada cuando las densidades de corriente varían en forma lineal con el tiempo (o las derivadas de orden superior a uno son despreciables). Siguiendo un razonamiento similar al anterior, es fácil demostrar que la ecuación (44) en estas condiciones conduce a la ley de Biot Savart obtenida en el caso estático.

## 2. Los campos electromagnéticos producidos por una carga puntual en movimiento

Analizaremos ahora los campos eléctrico y magnético producidos por una carga puntual  $q$  que se mueve siguiendo una trayectoria  $\mathbf{r}_0(t')$  en el espacio [2]. Comenzamos considerando las densidades de carga y corriente correspondientes a este caso

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) \quad (48)$$

y

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = \rho(\mathbf{r}', t')\mathbf{v}(t') = q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')), \quad (49)$$

donde  $\mathbf{v}(t') = d\mathbf{r}_0/dt'$ . Los potenciales retardados (26) y (27) tomarán la forma particular

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{v}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (50)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (51)$$

Como en los integrandos de estas expresiones aparece la función delta de Dirac, se puede estar tentado a pensar que los potenciales serán los mismos que los obtenidos en condiciones estáticas, sólo que evaluados en un punto retardado. Esto es incorrecto. La razón es que, en las deltas de Dirac  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$  de los integrandos de (50) y (51), el vector de posición  $\mathbf{r}_0$  es una función de la variable de integración. Por lo tanto las propiedades de la función delta de Dirac que conocemos ya no son válidas.

Es importante destacar que sólo un punto de la trayectoria estará en comunicación con el punto de observación  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$ . Para ver esto, consideremos la expresión para el tiempo retardado (25), a partir de la cual podemos escribir que

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = c(t - t_r). \quad (52)$$

Si hubiese dos puntos en comunicación,  $\mathbf{r}'_1$  y  $\mathbf{r}'_2$  correspondientes a los tiempos retardados  $t_{r1}$  y  $t_{r2}$ , entonces

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = c(t - t_{r1}) \quad \text{y} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| = c(t - t_{r2}), \quad (53)$$

o

$$\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|}{t_{r2} - t_{r1}} = c. \quad (54)$$

La ecuación anterior implica que la velocidad promedio en la dirección del punto de observación es  $c$ , lo cual no es posible para una partícula material moviéndose en el vacío (sólo un fotón podrá moverse a esa velocidad). Sin embargo, notemos que si la partícula se moviera en un medio material, su velocidad podría exceder a la de la luz y por lo tanto más de un punto de la trayectoria podría estar en comunicación con el punto de observación. Esto da vida al fenómeno conocido como **radiación de Cherenkov**, una luz azulada que se puede observar por ejemplo en el núcleo de un reactor nuclear sumergido en agua (este fenómeno también está relacionado con el estampido sónico producido por un avión que supera la barrera del sonido).

Para calcular los potenciales retardados de la partícula puntual, es común introducir el cambio de variable

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c), \quad (55)$$

de tal forma que la función delta de Dirac  $\delta(\mathbf{r}^*)$  se podrá integrar directamente. Se puede demostrar que los elementos de volumen estarán relacionados como (ver [2])

$$dv^* = s(t')dv' \quad \text{con} \quad s(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'), \quad (56)$$

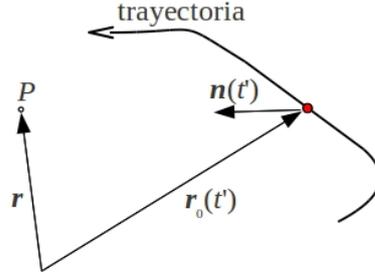


Figura 2: Trayectoria de una partícula puntual y punto de observación.

donde  $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ ,  $s(t')$  es el Jacobiano de la transformación,  $\mathbf{n}(t')$  es un versor que apunta desde la posición de la carga  $\mathbf{r}_0(t')$  al punto  $P$  (ver figura 2) y  $\beta(t') = \mathbf{v}(t')/c$ . Usando esta transformación es posible calcular los potenciales para una carga puntual

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{s(\tilde{t})} \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0|} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{s(\tilde{t})} \frac{\mu q \mathbf{v}(\tilde{t})}{4\pi |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0|}. \quad (57)$$

Los tildes en las variables indican que estas son evaluadas en los puntos o instantes retardados. A este par de ecuaciones se las denomina **potenciales de Lienard-Wiechert**. Para velocidades uniformes y no relativistas ( $|\mathbf{v}| \ll c$ ), los potenciales anteriores se reducen a las expresiones obtenidas en el caso estático.

Para entender por qué aparece un factor de corrección  $1/s$  en los potenciales de Lienard-Wiechert, consideremos el siguiente ejemplo [2]. La figura 3 muestra una barra cargada uniformemente que se mueve a velocidad  $v$  en el sentido positivo del eje  $x$ . Para calcular el potencial en  $P$  al tiempo  $t$ , debemos tener en cuenta que las contribuciones de cada uno de los elementos de volumen de la barra, deben tomarse a diferentes posiciones y tiempos retardados. De hecho, si al tiempo  $t$  los extremos se encuentran situados en  $x_1$  y  $x_2$ , sus respectivas posiciones retardadas  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  se podrán determinar a partir de

$$\frac{x_1 - \tilde{x}_1}{v} = \frac{x - \tilde{x}_1}{c} \quad \text{y} \quad \frac{x_2 - \tilde{x}_2}{v} = \frac{x - \tilde{x}_2}{c}. \quad (58)$$

Sustrayendo estas ecuaciones obtenemos

$$\tilde{L} = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 = \frac{x_2 - x_1}{1 - v/c} = \frac{L}{1 - v/c}, \quad (59)$$

donde  $L = x_2 - x_1$  es la longitud de la barra (medida en reposo) y  $\tilde{L} = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$  su longitud efectiva (en el sentido que la ve un observador en  $P$  al calcular el potencial). Notemos que entre

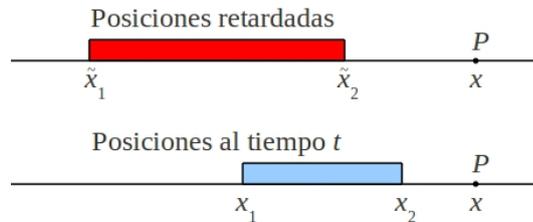


Figura 3: Posiciones retardadas y posiciones al tiempo  $t$ , de los diferentes puntos de una barra cargada que se mueve a velocidad  $v$  en el sentido positivo del eje  $x$ .

estas dos cantidades se encuentra el factor de corrección  $1/s$ . La ecuación anterior muestra que, debido al movimiento de la barra y a la velocidad finita con que se propaga una perturbación electromagnética, la longitud efectiva  $\tilde{L}$  será más grande que  $L$  (de hecho, esta cantidad diverge cuando  $v \rightarrow c$ ). Si tomamos el límite  $L \rightarrow 0$ , la barra se convertirá en una carga puntual y aún persistirá este factor  $1/s$ . Este ejemplo evidencia algo muy importante: la electrodinámica de Maxwell está formulada en términos de densidades de cargas y corrientes. Una carga puntual por ejemplo, debe considerarse como el límite de una función densidad cuando su extensión o volumen característico tiende a cero.

A partir de los potenciales (57) es posible determinar los campos eléctricos y magnéticos producidos por una carga puntual en movimiento. Los detalles pueden consultarse en las referencias [2, 6]. Usando la ecuación (5) podemos calcular el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \right]_{\sim}, \quad (60)$$

donde por simplicidad hemos definido  $R(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|$  y el símbolo  $\sim$  indica que el resultado de la expresión que está entre corchetes debe evaluarse en los puntos e instantes retardados. Por otro lado, tomando el rotacional del potencial vectorial obtenemos el campo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (61)$$

Notemos que  $\mathbf{B}$  siempre es perpendicular a  $\mathbf{E}$ . El primer término de (60) es el campo eléctrico de Coulomb para una carga situada en el punto retardado [11]. Podemos llamarlo el **campo de Coulomb retardado**. El segundo, el cual depende de la velocidad de la partícula, puede tomarse como una corrección del primero. De hecho, corrige al primer término de tal forma que el campo luce (aproximadamente) como si la partícula estuviera en la posición  $\mathbf{r}_0(t)$  y la información electromagnética llegara instantáneamente al punto  $\mathbf{r}$ . Esto puede comprobarse si se considera que el segundo término es igual a la velocidad de cambio del campo de Coulomb retardado (primer término) multiplicado por  $R/c$ , el tiempo que demora en llegar la señal producida en la posición retardada. A la suma de estos dos términos se la denomina **campo instantáneo de Coulomb**, el cual se puede demostrar que decae con la distancia como  $1/r^2$ . Finalmente, el tercer término es el que describe el fenómeno de radiación. Este campo depende de la aceleración de la carga y decae como  $1/r$ , lo que hace que domine a largas distancia.

Analicemos primero los campos producidos por una carga que sigue un movimiento uniforme en el vacío. En este caso el término de radiación en la ecuación (60) será cero. Se puede deducir que [2]

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \mathbf{n}. \quad (62)$$

El ángulo  $\theta$  así como el resto de las cantidades se encuentran representadas en la figura 4. Notemos que la ecuación anterior ha sido expresada en función de la posición de la carga al tiempo  $t$ . Podemos resaltar como un hecho extraordinario, que el campo eléctrico aunque depende del ángulo  $\theta$ , es radial a la posición instantánea. Respecto al campo producido por una carga en reposo, el campo eléctrico (62) en la dirección de propagación ( $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ ) está atenuado por un factor  $(1 - \beta^2)$ , mientras que en la dirección perpendicular ( $\theta = \pi/2$  o  $\theta = 3\pi/2$ ) está amplificado por un factor  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Por otro lado, el campo magnético puede escribirse como [6]

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^2} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}). \quad (63)$$

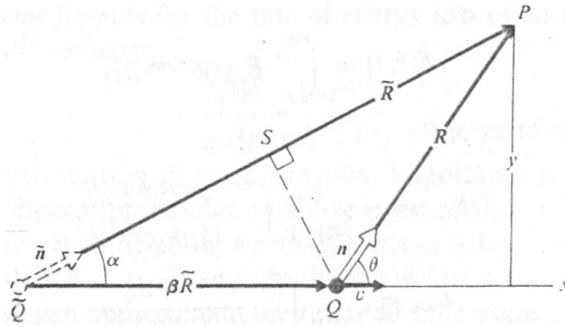


Figura 4: Esquema de una carga puntual en movimiento uniforme.

Este campo es perpendicular a  $\mathbf{E}$  y sus líneas de flujo forman círculos cerrados en torno al eje  $x$ . Es fácil ver que el vector de Poynting  $\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  es tangencial en todos los puntos de una superficie esférica centrada en  $Q$ . De esta forma, el flujo total de potencia es cero para una carga en movimiento uniforme. Decimos que la carga no radia energía. La figura 5 muestra esquemáticamente cómo el campo eléctrico se comprime en la dirección perpendicular al movimiento y cómo el campo magnético describe círculos en torno a esta misma dirección.

Realizando un análisis cualitativo de los campos, es posible entender por qué una carga radia energía cuando es acelerada. La figura 6 muestra un esquema aproximado de las líneas de flujo del campo eléctrico producido por una carga puntual que experimenta el siguiente movimiento. Hasta el tiempo  $t_0$  la partícula se encontraba en reposo. Luego, a partir de ese momento y hasta  $t_1$ , su velocidad se incrementó con una aceleración constante (suponemos que la carga nunca supera la velocidad de la luz en el medio en que se mueve). Finalmente, de  $t_1$  hasta  $t_2$  continuó con un movimiento uniforme. Podemos decir que la figura 6 está mostrando una instantánea de las líneas de flujo a  $t_2$ . Observemos que fuera de una esfera de radio  $c(t_2 - t_0)$  centrado en 0, la posición ocupada por la carga cuando estaba en reposo, el campo eléctrico radial es el de Coulomb. Ya que cualquier perturbación electromagnética se propaga a la velocidad de la luz, todos los observadores que estén fuera de esta esfera no se enterarán que la carga cambió su estado de movimiento.

Por otro lado, los puntos del espacio dentro de la esfera de radio  $c(t_2 - t_1)$  centrado en 1, sienten un campo eléctrico debido al movimiento uniforme de la carga entre  $t_1$  y  $t_2$ . Como vimos anteriormente, la ecuación (62) predice que este campo será radial respecto al punto 2, la posición actual de la carga. Esto es representado cualitativamente en la figura 6, mostrando que la intensidad eléctrica es mayor en la dirección perpendicular al movimiento. Debido a que las líneas de flujo de campo eléctrico son continuas (la ley de Gauss es válida incluso si los

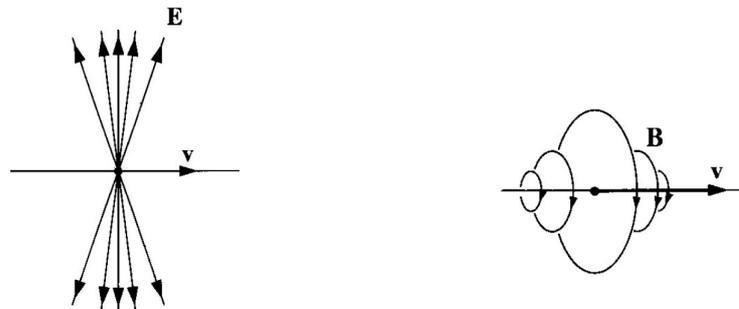


Figura 5: Campos de una carga puntual en movimiento uniforme.



### 3. Soluciones de las ecuaciones de onda inhomogéneas

Determinaremos ahora las soluciones de las ecuaciones de onda inhomogéneas (14) y (15), para el caso particular en que las fuentes  $\rho_v$  y  $\mathbf{J}$  varían en forma armónica en el tiempo. Comenzaremos escribiendo las formas armónicas complejas de algunas de las ecuaciones anteriores. La condición de Lorentz (13) en el espacio vacío se escribe como

$$\hat{\Phi} = -\frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}}{j\omega\mu_0\epsilon_0}. \quad (68)$$

Por otro lado, los campos magnético y eléctrico ecuaciones (1) y (5) se pueden escribir como

$$\hat{\mathbf{B}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}} \quad (69)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = -\nabla\hat{\Phi} - j\omega\hat{\mathbf{A}} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}})}{j\omega\mu_0\epsilon_0} - j\omega\hat{\mathbf{A}}, \quad (70)$$

donde ambos potenciales son soluciones de las ecuaciones de onda inhomogéneas (14) y (15)

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{\mathbf{A}} = -\mu_0 \hat{\mathbf{J}} \quad (71)$$

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{\Phi} = -\frac{\hat{\rho}_v}{\epsilon_0}. \quad (72)$$

Todas estas ecuaciones de onda escalares (tres para cada una de las componentes del potencial vectorial y una para el potencial escalar) tienen la misma forma, por lo que sólo necesitamos encontrar la solución para una de ellas. Nos concentraremos en la ecuación de onda (71) para el potencial vectorial. Para una dada componentes de  $\hat{\mathbf{A}}$ , la cual simplemente designaremos como  $\hat{A}$ , tenemos que

$$\nabla^2 \hat{A} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{A} = -\mu_0 \hat{J}. \quad (73)$$

Para encontrar un solución de esta ecuación, usaremos el **teorema simétrico de Green** (ver ecuación (94) de la Unidad 1)

$$\oint_S [f \nabla g - g \nabla f] \cdot ds' = \int_V [f \nabla^2 g - g \nabla^2 f] dv'. \quad (74)$$

Recordemos que esta expresión es correcta para cualquier par de funciones  $f$  y  $g$  que estén bien comportadas en el volumen  $V$  limitado por  $S$ . Veremos a continuación que eligiendo adecuadamente estas dos funciones, es posible encontrar la solución general para la ecuación de onda (73).

Como guía para la deducción consideremos la figura 7. Eligiendo la función  $f = \hat{A}(\mathbf{r})$ , el teorema simétrico de Green (74) se escribe como

$$\int_V [\hat{A}(\mathbf{r}') \nabla^2 g - g \nabla^2 \hat{A}(\mathbf{r}')] dv' = \oint_S \left[ \hat{A}(\mathbf{r}') \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds', \quad (75)$$

donde las derivadas parciales respecto a  $n$  se calculan en la dirección normal a la superficie  $S$ . Por razones que serán obvias enseguida, elegimos a  $g$  como la función

$$g = \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R}, \quad (76)$$

donde el número de onda  $\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ . La función  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  es la distancia entre el elemento de volumen  $dv'$  (o de superficie  $ds'$ ), y el punto  $P$  donde queremos determinar el

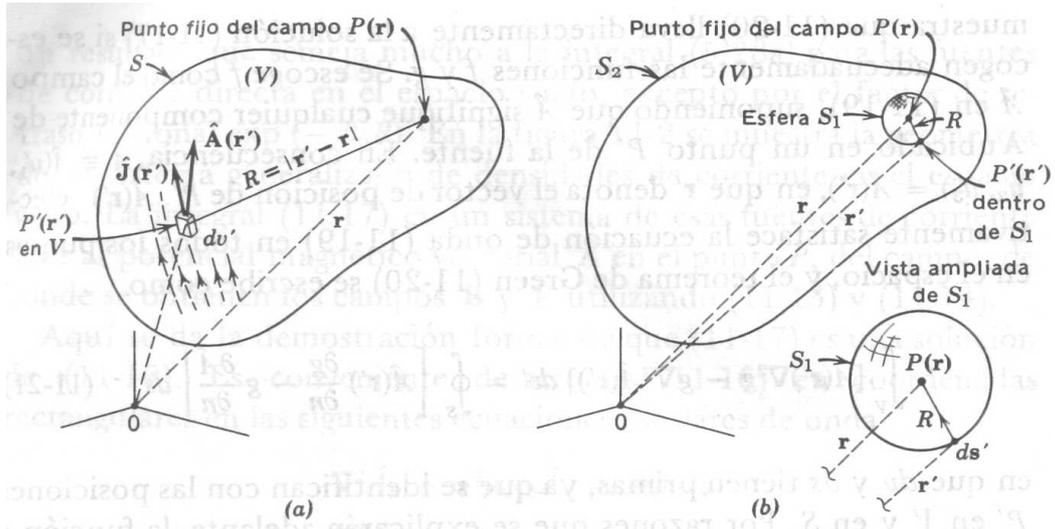


Figura 7: Geometría relativa a la deducción de la solución de la ecuación de onda inhomogénea.

potencial vectorial (la integral es sobre las variables primadas y  $\mathbf{r}$  señala la posición del punto  $P$ ). Notemos ahora que la función  $g$  que hemos elegido es solución de la ecuación de onda escalar homogénea

$$\nabla^2 g + \beta_0^2 g = 0, \quad (77)$$

donde  $\nabla$  opera sobre las variables sin primar. La demostración se deja como ejercicio para el alumno (ayuda: trabaje en coordenadas esféricas). Insertando (76) en (75) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \hat{A}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \right) - \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \nabla^2 \hat{A}(\mathbf{r}') \right] dv' = \\ & = \oint_S \left[ \hat{A}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \right) - \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds'. \end{aligned} \quad (78)$$

Luego, usando (77) y (73), podemos transformar apreciablemente la integral de volumen de la expresión anterior

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ -\hat{A}(\mathbf{r}') \beta_0^2 \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} - \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \nabla^2 \hat{A}(\mathbf{r}') \right] dv' = \\ & = \int_V -\frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \left[ \nabla^2 \hat{A}(\mathbf{r}') + \beta_0^2 \hat{A}(\mathbf{r}') \right] dv' = \\ & = \int_V \frac{\mu_0 \hat{J}(\mathbf{r}') e^{-j\beta_0 R}}{R} dv'. \end{aligned} \quad (79)$$

Un problema con la expresión (79) es que la integral no converge si el punto  $P$  se encuentra dentro del volumen de integración. Esto se debe a que la función  $g$  diverge para  $R = 0$ , violando el requerimiento de que dicha función debe estar bien comportada dentro del dominio de integración. Para solucionar esto excluimos dicho punto del volumen  $V$ , lo cual afecta a la integral de superficie en (78). Para excluir a  $P$ , como muestra la parte (b) de la figura 7 subdividimos la superficie cerrada  $S$  en  $S_1$  y  $S_2$ . Simbólicamente podemos escribir que

$$\oint_V [ ] dv' = \oint_S [ ] ds' = \oint_{S_1} [ ] ds' + \oint_{S_2} [ ] ds'. \quad (80)$$

Elegimos que  $S_1$  sea una superficie esférica centrada en  $P$ , cuyo radio  $R_1$  luego haremos tender a cero. En la figura 7 (b) podemos observar que  $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$ , ya que la normal está dirigida hacia afuera del volumen  $V$ , es decir, hacia el punto  $P$ . En consecuencia

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} [ ] ds' &= \oint_{S_1} \left[ -\hat{A}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \right) + \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right] \Big|_{R=R_1} ds' \\ &= \oint_{S_1} \left[ \hat{A}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R_1^2} + j \frac{\beta_0}{R_1} \right) e^{-j\beta_0 R_1} + \frac{e^{-j\beta_0 R_1}}{R_1} \frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}')}{\partial R} \Big|_{R=R_1} \right] ds'. \end{aligned} \quad (81)$$

De acuerdo al **teorema del valor medio** la integral anterior se puede escribir como

$$\oint_{S_1} [ ] ds' = \left[ \langle \hat{A} \rangle \left( \frac{1}{R_1^2} + j \frac{\beta_0}{R_1} \right) e^{-j\beta_0 R_1} + \frac{e^{-j\beta_0 R_1}}{R_1} \left\langle \frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right\rangle \Big|_{R=R_1} \right] \oint_{S_1} ds'. \quad (82)$$

Como la integral sobre la esfera es  $4\pi R_1^2$ , en el límite con  $R_1 \rightarrow 0$  obtenemos

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \oint_{S_1} [ ] ds' = 4\pi \hat{A}(\mathbf{r}). \quad (83)$$

Introduciendo (79) y (83) en (78), el potencial vectorial en el punto  $P$  es

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{-j\beta_0 R}}{4\pi R} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}')}{\partial n} - \hat{A}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \right) \right] ds', \quad (84)$$

donde  $S = S_2$  pues la superficie  $S_1$  tendió a cero. Ya que la ecuación anterior es válida para cada una de las componentes de  $\hat{\mathbf{A}}$ , podemos escribir la expresión integral

$$\boxed{\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{-j\beta_0 R}}{4\pi R} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}')}{\partial n} - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \right) \right] ds'}. \quad (85)$$

Una expresión similar puede deducirse para el potencial escalar  $\hat{\Phi}$ . No obstante, no es necesario determinar este potencial, pues ambos campos magnético y eléctrico pueden determinarse a partir de  $\hat{\mathbf{A}}$  usando las ecuaciones (69) y (70).

Podemos identificar 3 casos de interés:

- a) Si dentro del volumen  $V$  no hay ninguna densidad de corriente, entonces (85) queda

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}')}{\partial n} - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-j\beta_0 R}}{R} \right) \right] ds'. \quad (86)$$

- b) Supongamos que la región del espacio donde se encuentran todas las densidades de corriente está acotada. Entonces haciendo tender a infinito el dominio de integración, la integral de superficie se anula y nos queda

$$\boxed{\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{-j\beta_0 R}}{4\pi R} dv'}. \quad (87)$$

Esta expresión es similar a la que se obtiene en el caso estático, salvo por el factor exponencial que tiene en cuenta el retraso debido a que las perturbaciones electromagnéticas viajan a una velocidad finita  $c$ .

- c) Por último, está la posibilidad que dentro y fuera de  $V$  existan densidades de corriente. En este caso se deberá usar la expresión completa (85) para obtener el potencial vectorial en el punto  $P$ .

## 4. Radiación de un elemento infinitesimal de corriente

Usando la expresión (87) es posible determinar en cualquier punto del espacio el potencial vectorial debido a corrientes armónicas localizadas. Luego, empleando (69) y (70), los campos magnético y eléctrico pueden ser calculados. Este procedimiento permite obtener los campos de radiación producidos por antenas de diferentes geometrías.

Una fuente de radiación básica es el **elemento de corriente oscilante infinitesimal**, el cual se ilustra en la figura 8. Si la densidad de corriente compleja es  $\hat{\mathbf{J}}$  y circula en la dirección del eje  $z$ , entonces

$$\hat{\mathbf{J}}dv = (\hat{\mathbf{J}}ds)dz = \mathbf{a}_z \hat{I}dz. \quad (88)$$

La expresión armónica compleja para una corriente que oscila con frecuencia angular  $\omega$  se puede escribir como  $\hat{I} = j\omega\hat{q}$  (la derivada de la carga respecto al tiempo). Esta ecuación indica que en los extremos del elemento de longitud habrá acumulación de carga. Por este motivo, a un elemento de corriente que cambia en forma armónica se lo denomina **dipolo eléctrico oscilante**. Considerando la forma que tiene el integrando de la ecuación (87), el potencial vectorial para este elemento de corriente será

$$d\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{a}_z d\hat{A}_z = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 \hat{I} e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r} dz', \quad (89)$$

donde  $r$  es la distancia entre el elemento de corriente y el punto  $P$  [ver figura 8 (b)]. Notemos que una corriente en la dirección de  $z$  genera un potencial vectorial en la misma dirección. En coordenadas esféricas podemos escribir que

$$d\hat{A}_r = d\hat{A}_z \cos \theta \quad \text{y} \quad d\hat{A}_\theta = -d\hat{A}_z \sin \theta \quad (90)$$

y

$$d\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{a}_r d\hat{A}_r + \mathbf{a}_\theta d\hat{A}_\theta. \quad (91)$$

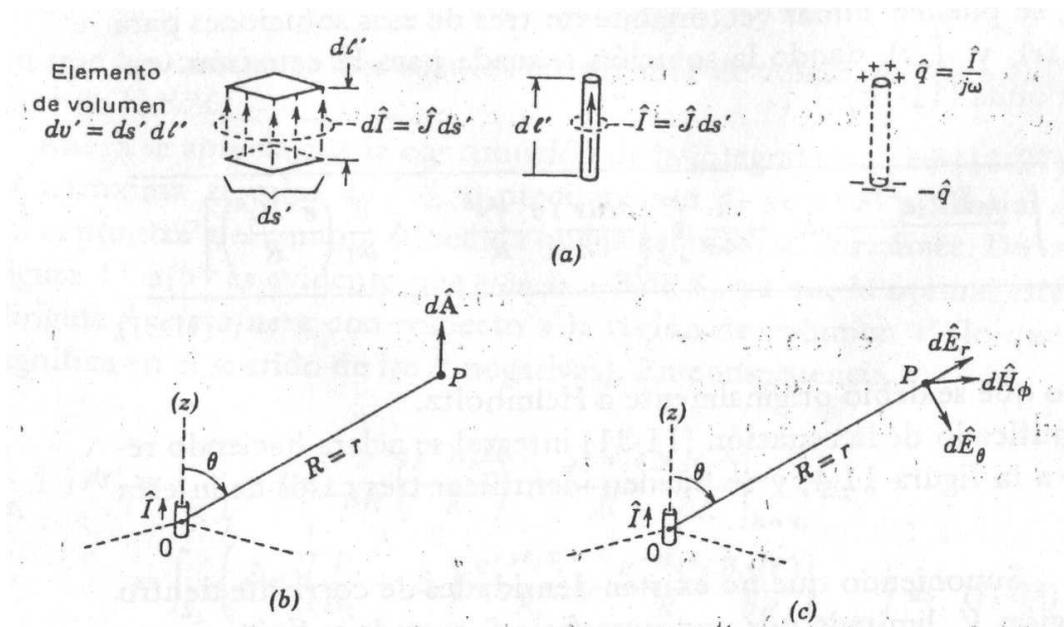


Figura 8: Elemento oscilante de corriente de tamaño infinitesimal.

El campo magnético  $\hat{\mathbf{H}}$  se puede obtener calculando el rotor de este potencial vectorial

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{H}} &= \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{\mu_0} = \frac{\nabla \times (d\hat{\mathbf{A}})}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{a}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\mathbf{a}_\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ d\hat{A}_r & r d\hat{A}_\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_\phi \frac{\hat{I} dz'}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \left[ \frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (92)$$

Por otro lado, usando la ley de Ampère (considerando que en el espacio vacío donde está el punto  $P$  no hay corrientes), podemos determinar también el campo eléctrico

$$d\hat{\mathbf{E}} = \frac{\nabla \times (d\hat{\mathbf{H}})}{j\omega\epsilon_0} = \mathbf{a}_r d\hat{E}_r + \mathbf{a}_\theta d\hat{E}_\theta, \quad (93)$$

donde cada una de las componentes son

$$d\hat{E}_r = \frac{\hat{I} dz'}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \left[ \frac{2\eta_0}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos \theta \quad (94)$$

$$d\hat{E}_\theta = \frac{\hat{I} dz'}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \left[ \frac{j\omega\mu_0}{r} + \frac{\eta_0}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \sin \theta, \quad (95)$$

y  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  es la impedancia intrínseca de onda para el espacio vacío.

La figura 9 muestra las líneas de campo eléctrico del dipolo oscilante para un determinado instante de tiempo. Es conveniente estudiar los campos haciendo una separación en dos regiones

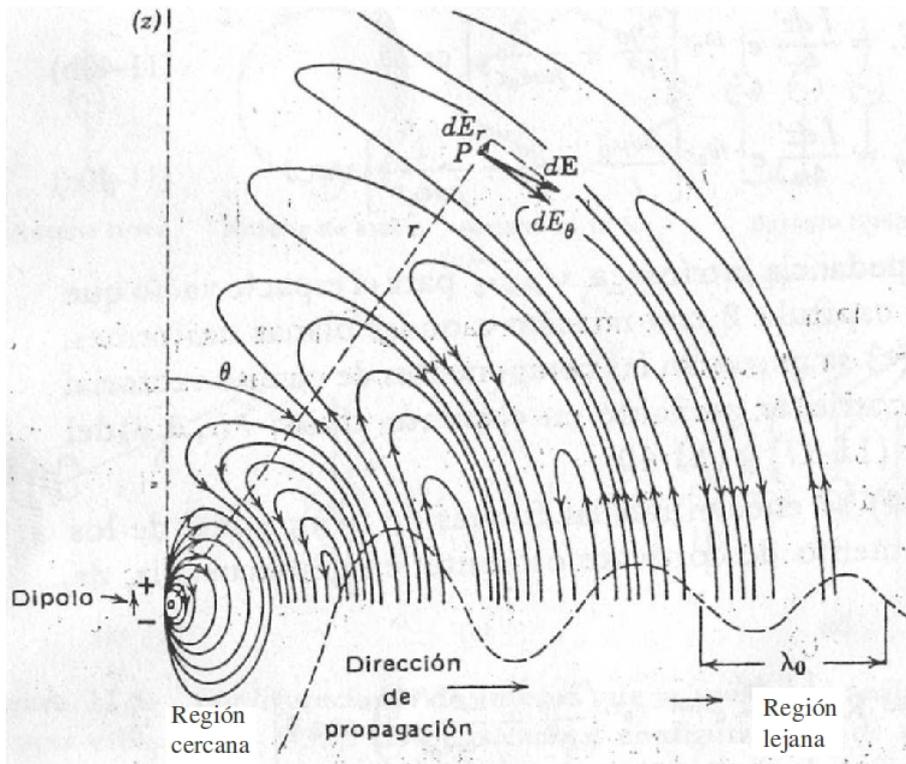


Figura 9: Flujo de campo eléctrico de un elemento infinitesimal de corriente.



De acuerdo al teorema de Poynting, la potencia promedio radiada es [1]

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re}(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{s}, \quad (101)$$

donde la integral en el tiempo se calcula en un período  $T$ . En este caso, calcularemos la integral de superficie sobre una esfera en cuyo centro se encuentra el elemento infinitesimal de corriente. Como los campos de la zona cercana están desfasados, es fácil ver que su contribución a la potencia promedio es nula [1]. Sin embargo, para los campos lejanos tenemos que

$$P_{\text{prom}} = \frac{\eta_0 \pi I^2}{3} \left( \frac{dz'}{\lambda_0} \right)^2, \quad (102)$$

donde  $I$  es el valor de la amplitud real de la corriente y  $\lambda_0$  la longitud de onda en el vacío. Notemos que la potencia radiada es proporcional al cuadrado de la corriente, un resultado que recuerda a la ley de Joule

$$P_{\text{prom}} = R_{\text{Jou}} I_{\text{ef}}^2. \quad (103)$$

Considerando que la corriente eficaz es  $I_{\text{ef}} = I/\sqrt{2}$ , la ecuación (102) se puede reescribir como

$$\boxed{P_{\text{prom}} = R_{\text{rad}} I_{\text{ef}}^2}, \quad (104)$$

donde a

$$\boxed{R_{\text{rad}} = \frac{2\eta_0 \pi}{3} \left( \frac{dz'}{\lambda_0} \right)^2 = 80\pi^2 \left( \frac{dz'}{\lambda_0} \right)^2} \quad (105)$$

se la denomina **resistencia de radiación**.

Un elemento de corriente eléctricamente corto no puede radiar mucha potencia. Por ejemplo, si se lograra excitar con 1 A de corriente una antena de alambre de 3 cm de longitud a una frecuencia de 100 MHz [con lo cual  $(dz'/\lambda_0) = 0,01$ ], entonces de acuerdo a la ecuación (102) sólo se podría emitir 50 mW. Más allá de los problemas de excitar una antena eléctricamente corta con tanta corriente, esta potencia es mucho menor que la que puede obtenerse de una antena lineal alimentada desde el centro que transporta la misma intensidad de corriente. Este tipo de dispositivos serán analizados en la siguiente sección.

## 5. Antena lineal delgada alimentada desde el centro

Una forma eficiente de radiar energía es mediante una antena de alambre conductor alimentada por una fuente de tensión. El propósito de esta sección será encontrar los campos producidos por este tipo de dispositivos.

La figura 11 (a) muestra un esquema de una antena lineal alimentada desde el centro. Los campos electromagnéticos en un punto  $P$ , se pueden determinar calculando primero el potencial vectorial con la expresión (87) y luego usando las ecuaciones (69) y (70). Un camino más directo (el cual usaremos más adelante), consiste en sumar las contribuciones a los campos de cada uno de los elementos diferenciales de corriente a lo largo de la antena. Como en la práctica estamos interesados en la zona lejana, sólo será necesario integrar las expresiones (99) y (100). Sea cual sea el método usado, para poder proceder lo fundamental es conocer la distribución de corriente a lo largo de la antena.

Experimentalmente se observa que la corriente forma una onda estacionaria con nodos en los extremos de la antena. Como sugiere la figura 11 (b), al menos cualitativamente, una

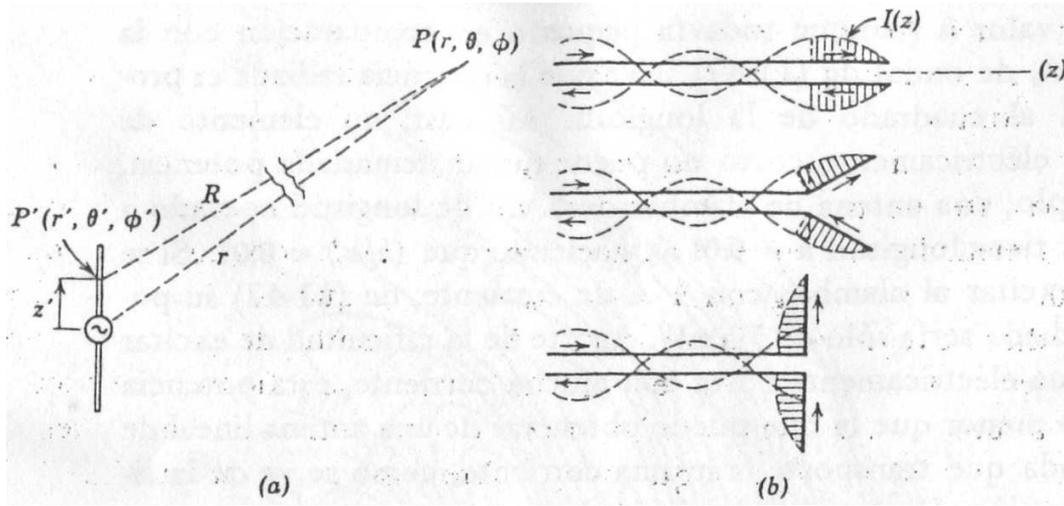


Figura 11: (a) Esquema de una antena lineal. (b) Construcción aproximada de una antena a partir de la deformación de una línea de transmisión.

antena lineal puede considerarse como una sección abierta de una línea de transmisión de dos conductores terminada en un circuito abierto. Los campos de radiación calculados con esta aproximación, no difieren sustancialmente de aquellos que son medidos en la práctica.

Para demostrar que es razonable suponer la existencia de una onda estacionaria de corriente, procedamos como sigue. Consideremos un alambre unidimensional situado a lo largo del eje  $z$ . Si deseamos calcular el potencial vectorial en un punto cercano localizado a una distancia  $a$  medida en dirección transversal, la expresión (87) nos dice que debemos realizar una integración a lo largo de todo el alambre. No obstante, notemos que el integrando está atenuado con un factor  $1/R$ , siendo  $R$  la longitud de separación que hay entre cada elemento de corriente y el punto  $P$ . De esta forma, aquellos elementos situados a una distancia  $R \gg a$  tendrán una contribución muy pequeña a la integral. Por este motivo, en coordenadas circular cilíndricas podemos aproximar el potencial vectorial en un punto situado en  $z$  y  $\rho = a$  como

$$\hat{\mathbf{A}}(z, a) \approx \mathbf{a}_z \int_{z'=z-l}^{z'=z+l} \frac{\mu_0 \hat{I}(z') e^{-j\beta_0 R}}{4\pi R} dz', \quad (106)$$

donde  $l$  define una vecindad entorno a  $z$  para la cual se cumple que  $l \gg a$ . Si la longitud de onda es  $\lambda \gg l$ , entonces el factor exponencial  $e^{-j\beta_0 R}$  tendrá un valor próximo a la unidad y la corriente se mantendrá aproximadamente constante dentro de los límites de integración. Como  $R = \sqrt{a^2 + (z' - z)^2}$ , vemos que la integral (106) queda

$$\hat{\mathbf{A}}(z, a) \approx \mathbf{a}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{I}(z) \int_{z'=z-l}^{z'=z+l} \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z' - z)^2}} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{I}(z) \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} \right). \quad (107)$$

La ecuación anterior muestra que la componente  $z$  del potencial vectorial y la corriente en un punto muy cercano al alambre son aproximadamente proporcionales

$$\hat{A}_z(z, a) \approx K \hat{I}(z), \quad (108)$$

donde  $K$  es una constante. Como vemos, en un sistema con simetría axial como el que estamos considerando el potencial vectorial sólo tiene una componente a lo largo de  $z$ . Esta función

será solución de la ecuación de onda (73) la cual, en ausencia de corriente (estamos calculando el potencial fuera del alambre), toma la forma

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{A}_z = 0. \quad (109)$$

Debido a la ecuación (108), podemos deducir que también la corriente seguirá una ecuación de onda homogénea similar

$$\frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{I} = 0, \quad (110)$$

la que evidentemente tiene una solución general

$$\hat{I}(z) = \hat{I}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{I}_m^- e^{j\beta_0 z}. \quad (111)$$

Finalmente, como en los extremos abiertos de una antena se requiere que la corriente se anule, las soluciones particulares de estos sistemas serán ondas estacionarias sinusoidales. Notemos que en la ecuación de onda (110), el factor de fase  $\beta_0$  es el correspondiente a los campos en el espacio vacío que rodea a la antena.

En la figura 12 se muestran diferentes antenas lineales excitadas por un fuente sinusoidal. En general, además de ser solución de la ecuación (110), la corriente en una antena debe cumplir con las siguientes reglas:

- La corriente a través de la fuente debe tener continuidad. Es decir, la corriente que entra por un terminal debe ser igual a la que sale por el otro.
- Si los extremos de la antena están abiertos la corriente allí debe anularse.
- Las corrientes en cada una de las ramas deben ser ondas estacionarias con una constante de fase  $\beta_0$ .

Si la antena lineal es recta y tiene sus dos ramas de la misma longitud  $l$ , entonces la siguiente función cumple con estas tres reglas

$$\hat{I}(z) = \begin{cases} \hat{I}_m \sin \beta_0(l - z) & \text{para } 0 < z < l \\ \hat{I}_m \sin \beta_0(l + z) & \text{para } -l < z < 0 \end{cases},$$

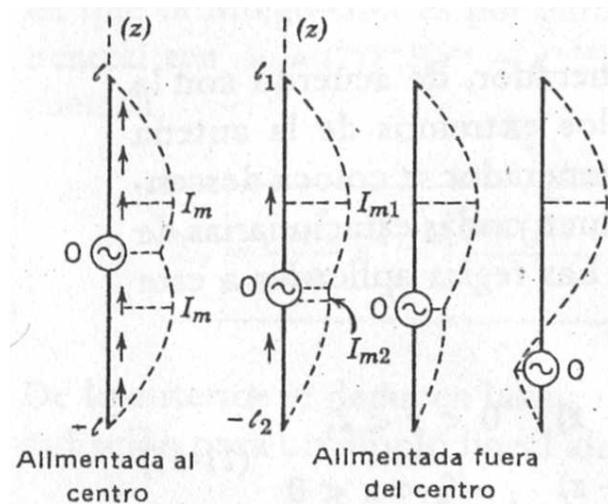


Figura 12: Distribuciones de corriente en antenas lineales de diferentes geometrías.

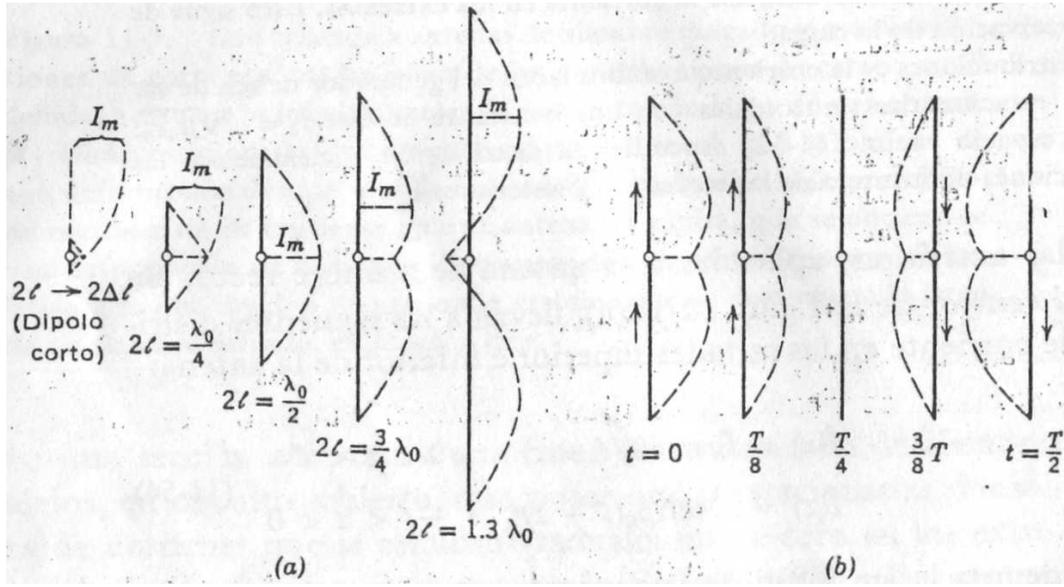


Figura 13: (a) Ondas estacionarias en antenas de diferentes longitudes excitadas a la misma frecuencia. (b) Perfil de corriente en una antena de  $3/4\lambda_0$  para diferentes tiempos.

donde  $\hat{I}_m$  denota la amplitud máxima de la corriente y se ha supuesto que la antena está centrada en  $z = 0$ . La figura 13 muestra las ondas estacionarias en diferentes antenas de longitudes típicas. En especial en el panel (b), podemos apreciar el perfil de corriente en una antena de  $3/4$  de longitud de onda para diferentes tiempos. Por otro lado, si las longitudes de cada rama son diferentes (ver figura 12), entonces la corriente se puede escribir como

$$\hat{I}(z) = \begin{cases} \hat{I}_{m1} \text{sen } \beta_0(l_1 - z) & \text{para } 0 < z < l_1 \\ \hat{I}_{m2} \text{sen } \beta_0(l_2 + z) & \text{para } -l_2 < z < 0 \end{cases} .$$

En este caso, para que se cumple la regla a), las amplitudes deben satisfacer la relación

$$\hat{I}_{m2} = \hat{I}_{m1} \frac{\text{sen } \beta_0 l_1}{\text{sen } \beta_0 l_2} . \quad (112)$$

Una vez que hemos obtenido una aproximación razonable para la distribución de corriente, es posible calcular los campos electromagnéticos producidos por una antena lineal. Consideraremos el caso de una antena simétrica cuyas ramas tienen una longitud  $l$ . Como sólo estamos interesados en la zona lejana, calcularemos el campo eléctrico usando el diferencial (99) (el campo magnético se puede obtener simplemente dividiendo el campo eléctrico por  $\eta_0$ ). Con la ayuda de la figura 14 podemos ver que para un elemento típico de corriente

$$d\hat{E}_\theta = \frac{j\eta_0\beta_0\hat{I}dz'}{4\pi R} e^{-j\beta_0 R} \text{sen } \theta, \quad (113)$$

donde sólo hemos reemplazado  $\omega\mu_0$  por  $\eta_0\beta_0$ .  $R$  mide la distancia que hay entre el elemento diferencial y el punto  $P$  donde se está evaluando el campo. Si  $P$  está en la zona lejana, entonces es posible escribir la aproximación

$$R \approx r - z' \cos \theta, \quad (114)$$

donde  $r$  es la distancia del centro de la antena al punto  $P$ . Para escribir la expresión anterior hemos supuesto que  $R \gg l$  de tal forma que  $R$  y  $r$  son esencialmente paralelas. Utilizando (113)

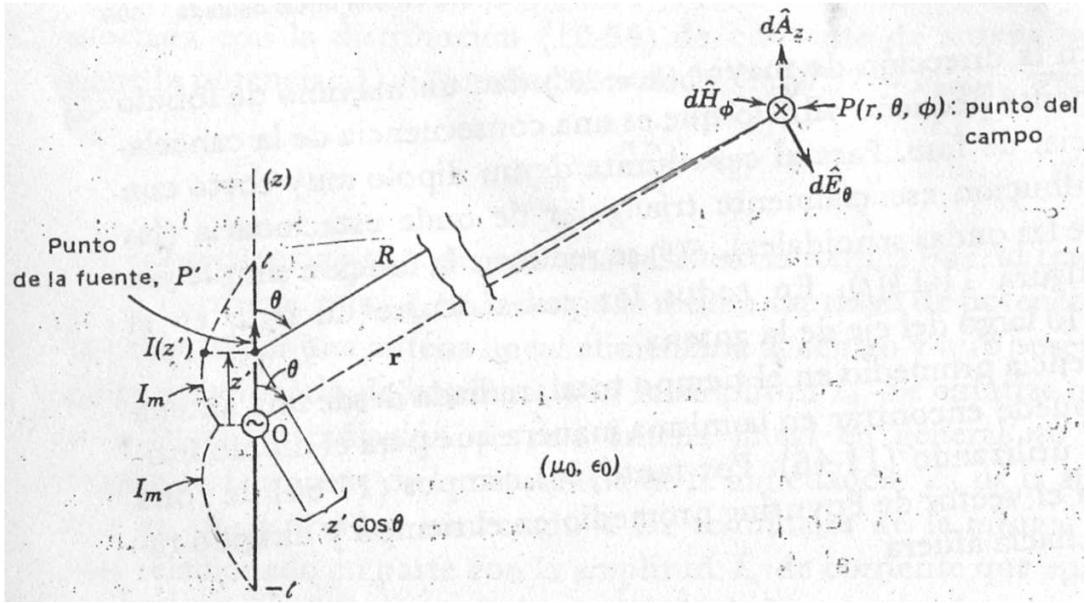


Figura 14: Esquema de una antena lineal y las variables involucradas en el cálculo de los campos en la zona lejana.

y (114) podemos escribir

$$\begin{aligned}\hat{E}_\theta &= \int d\hat{E}_\theta = \frac{j\eta_0\beta_0 \text{sen } \theta}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{\hat{I}(z') e^{-j\beta_0(r-z' \cos \theta)}}{r - z' \cos \theta} dz' \\ &= \frac{j\eta_0\beta_0 \text{sen } \theta}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \int_{-l}^l \frac{\hat{I}(z') e^{j\beta_0 z' \cos \theta}}{r - z' \cos \theta} dz',\end{aligned}\quad (115)$$

donde la corriente  $\hat{I}(z')$  está dada por

$$\hat{I}(z) = \begin{cases} \hat{I}_m \text{sen } \beta_0(l - z) & \text{para } 0 < z < l \\ \hat{I}_m \text{sen } \beta_0(l + z) & \text{para } -l < z < 0 \end{cases}.$$

Observando el integrando de (115), notemos que la función  $e^{j\beta_0 z' \cos \theta}$  es el factor que tiene en cuenta los efectos de interferencia que aparecerán en  $P$ . Si la extensión de la antena es del orden de la longitud de onda, entonces el factor exponencial cambiará considerablemente su valor a lo largo del rango de integración. En comparación, el factor  $r - z' \cos \theta$  en el denominador del integrando, sólo afectará a la amplitud del campo eléctrico producido por cada uno de los diferenciales de corriente. Como este efecto es pequeño podemos realizar la aproximación  $r - z' \cos \theta \approx r$  (sólo en el denominador del integrando). En consecuencia con estas simplificaciones podemos reescribir (115) como

$$\hat{E}_\theta = \frac{j\eta_0\beta_0\hat{I}_m e^{-j\beta_0 r} \text{sen } \theta}{4\pi r} \left[ \int_{-l}^0 e^{j\beta_0 z' \cos \theta} \text{sen } \beta_0(l + z) dz' + \int_0^l e^{j\beta_0 z' \cos \theta} \text{sen } \beta_0(l - z) dz' \right]. \quad (116)$$

Integrando por partes es fácil demostrar que

$$\hat{E}_\theta = \frac{j\eta_0\hat{I}_m}{2\pi r} e^{-j\beta_0 r} \left[ \frac{\cos(\beta_0 l \cos \theta) - \cos \beta_0 l}{\text{sen } \theta} \right] = \eta_0 \hat{H}_\phi, \quad (117)$$

donde también hemos determinado el campo magnético el cual está en la dirección  $\mathbf{a}_\phi$ .

Analizando (117) podemos deducir lo siguiente:

- Los campos eléctrico y magnético en la zona lejana son onda esféricas TEM, y están relacionados por la impedancia intrínseca del vacío  $\eta_0$  la cual es real (suponemos que al antena está rodeada de vacío o aire). Las esferas con  $r = \text{cte.}$  forman superficies equifásicas, mientras las amplitudes de cada uno de los campos se atenúan como  $1/r$ .
- Los campos son proporcionales a la amplitud de corriente  $\hat{I}_m$ .
- Hay simetría azimutal pues los campos no dependen de la variable  $\phi$ . La dependencia con  $\theta$  está dada por el patrón de radiación

$$F(\theta) = \left[ \frac{\cos(\beta_0 l \cos \theta) - \cos \beta_0 l}{\sin \theta} \right]. \quad (118)$$

La potencia promedio radiada se puede calcular usando (101). Para los campos de una antena lineal esta expresión no es integrable en forma cerrada. Sin embargo, usando métodos aproximados, para un dipolo de media onda se obtiene

$$P_{\text{prom}} \approx 36,5 I_m^2 \text{ [W]} \quad (\text{dipolo de media onda}). \quad (119)$$

En consecuencia, la resistencia de radiación será

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{prom}}}{I_m^2} \approx 73 \text{ [\Omega]} \quad (\text{dipolo de media onda}). \quad (120)$$

En este caso particular, la impedancia de entrada  $\hat{Z}_a$  de la antena de media onda es igual a la resistencia de radiación,  $Z_a = R_{\text{rad}}$  (en general esto no es cierto para antenas con otra longitud).

## 6. Parámetros de antenas

Las antenas y en general todos los sistemas empleados para radiar energía electromagnética, pueden ser caracterizados por un conjunto de parámetros estándares. Estos permiten seleccionar la antena más adecuada para una aplicación particular. A continuación se definen los parámetros de antenas más importantes.

### 6.1. Patrón de radiación

El **patrón de radiación** de una antena es simplemente una función que especifica la dependencia angular de los campos en la zona lejana. Por ejemplo, como vimos anteriormente, para una antena lineal delgada alimentada desde el centro los campos eléctrico y magnético tienen una dependencia con  $\theta$  dada por la ecuación (118). Esta función es el patrón de radiación de dicho dispositivo.

Para diferentes longitudes de un antena lineal (medias en unidades de la longitud de onda en el vacío,  $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0$ ), la función (118) presenta estructuras que están formadas por una multiplicidad de lóbulos. La figura 15 muestra tres ejemplos típicos. En a) podemos observar el patrón de radiación y el perfil de corriente para una antena denominada **dipolo corto** para la cual se cumple que  $2l \ll \lambda_0$ . Esencialmente en este caso el patrón es circular (este mismo resultado fue obtenido anteriormente para un elemento de corriente elemental). Luego, cuando

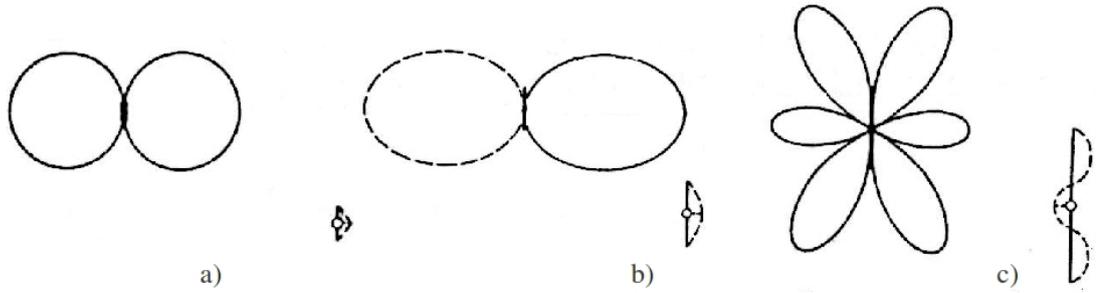


Figura 15: Antenas lineales alimentadas desde el centro de diferentes longitudes y sus patrones de radiación. a) Dipolo corto, b) dipolo de media onda y c) dipolo de 3/2 de longitud de onda.

la longitud de la antena es comparable a  $\lambda_0$ , y en especial para el **dipolo de media onda** mostrado en b) (para el cual  $2l = \lambda_0/2$ ), el patrón aunque se alarga conserva un único lóbulo que se alarga en la dirección perpendicular a la antena. Finalmente, si  $2l \gg \lambda_0$  (en la figura 15 c) sólo se muestra el caso  $2l = 3\lambda_0/2$ ), surgen una multiplicidad de lóbulos que definen direcciones de máxima radiación, entre los cuales también hay otras direcciones en las que no se emite energía. En todos los casos en la dirección en que apunta la antena, el patrón de radiación es cero.

En general para otros tipos de antenas, como las parabólicas, las Yagi, piramidales, etc (ver referencias [12, 13]), el patrón de radiación no sólo depende de  $\theta$  sino de  $\phi$ .

## 6.2. Ganancia

La **ganancia de una antena** en un cierto punto del espacio, es la relación entre la densidad de potencia radiada por la antena en dicho punto ( $P$ ) y la densidad de potencia radiada por una antena de referencia ( $P_r$ ) en el mismo lugar

$$G = \frac{P}{P_r}. \quad (121)$$

Como la densidad de potencia es igual al módulo del vector de Poynting, para una onda transversal electromagnética tenemos que

$$P = |\mathcal{P}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{1}{2} |\text{Re}(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*)| = \frac{E^2}{2\eta_0}, \quad (122)$$

y por lo tanto

$$G = \frac{E^2}{E_r^2}. \quad (123)$$

La ganancia expresada en decibelios sería

$$G(\text{dB}) = 10 \log \frac{P}{P_r} = 20 \log \frac{E}{E_r}. \quad (124)$$

Cuando la antena de referencia es un radiador isótropo de la misma potencia  $W_T$  que la antena real, entonces la ganancia se denomina **ganancia directiva**. En este caso tenemos que

$$P_r = \frac{W_T}{4\pi r^2}. \quad (125)$$

Si conocemos la resistencia de radiación de la antena real podemos escribir que

$$W_T = R_{\text{rad}} I_{\text{ef}}^2. \quad (126)$$

Luego la ganancia directiva será

$$G_D = 4\pi r^2 \frac{P}{W_T} = 4\pi r^2 \frac{P}{R_{\text{rad}} I_{\text{ef}}^2}. \quad (127)$$

Como la ganancia directiva depende de la dirección, entonces se define la **directividad** como la máxima ganancia directiva,  $D = G_{D_{\text{max}}}$ , siendo  $\theta_{\text{max}}$  el ángulo correspondiente (ver tabla 3.3 en la página 115 de la referencia [12]).

Como ejemplo calculemos la ganancia directiva de un dipolo de media onda. De acuerdo a la ecuación (117), si  $2l = \lambda_0/2$  entonces  $l\beta_0 = \pi/2$  y el campo eléctrico es

$$\hat{E}_\theta = \frac{j\eta_0 \hat{I}_m}{2\pi r} e^{-j\beta_0 r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}. \quad (128)$$

Para esta antena la potencia en cada uno de los puntos del espacio será

$$P = \frac{E^2}{2\eta_0} = \frac{\eta_0 (\sqrt{2} I_{\text{ef}})^2 \cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{8\pi^2 r^2 \sin^2 \theta} = \frac{30}{\pi} \frac{I_{\text{ef}}^2 \cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (129)$$

y por lo tanto, considerando que su resistencia de radiación es  $R_{\text{rad}} \approx 73 [\Omega]$ , tenemos que la ganancia directiva (127) será

$$G_D \approx 1,64 \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (130)$$

### 6.3. Eficiencia

Se define como **eficiencia de una antena** a la relación entre la potencia radiada  $W_T$  y la potencia de alimentación  $W_A$ . Es decir

$$\varepsilon = \frac{W_T}{W_A}. \quad (131)$$

La potencia de alimentación se reparte entre la potencia radiada por la antena y la disipada como calor por el efecto Joule. Si  $R_p$  es la resistencia del conductor tenemos que

$$W_A = (R_{\text{rad}} + R_p) I_{\text{ef}}^2. \quad (132)$$

Entonces la eficiencia de la antena estaría dada por

$$\varepsilon = \frac{R_{\text{rad}} I_{\text{ef}}^2}{(R_{\text{rad}} + R_p) I_{\text{ef}}^2} = \frac{R_{\text{rad}}}{R_{\text{rad}} + R_p}. \quad (133)$$

### 6.4. Longitud efectiva

Para una antena emisora en cuyos terminales la corriente tiene una amplitud  $I_0$ , se define su **longitud efectiva** como la longitud de un radiador hipotético con una distribución uniforme de corriente de magnitud  $I_0$ , que radía la misma intensidad de campo (eléctrico o magnético) en la dirección de máxima radiación. En el caso de una antena lineal alimentada desde el centro, la longitud efectiva  $l_{\text{ef}}$  puede obtenerse a partir de la siguiente expresión [12]

$$l_{\text{ef}} = \frac{1}{I_0} \int_{-l}^l I(z) dz, \quad (134)$$

donde  $I(z)$  es el perfil de corriente. Por ejemplo, para un dipolo de media onda tenemos que

$$l_{\text{ef}} = \frac{1}{I_m \sin \beta_0 l} \left[ \int_0^l I_m \sin \beta_0(l-z) dz + \int_{-l}^0 I_m \sin \beta_0(l+z) dz \right]. \quad (135)$$

Teniendo en cuenta que  $\beta_0 l = \pi/2$ , integrando obtenemos

$$l_{\text{ef}} = \frac{\lambda_0}{\pi} \left( \frac{1 - \cos \beta_0 l}{\sin \beta_0 l} \right) = \frac{\lambda_0}{\pi} = \frac{4l}{\pi} \approx 0,637(2l). \quad (136)$$

Es decir, el dipolo de media onda luce a grandes distancia como una antena que conduce una corriente uniforme, pero de una longitud efectiva que es aproximadamente  $2/3$  de la longitud total del dipolo.

Una expresión útil es (ver una deducción en la referencia [12])

$$l_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{R_{\text{rad}} D}{\eta_0 \pi}}. \quad (137)$$

En una antena usada como receptora, la longitud efectiva se define como

$$l_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ca}}}{E}, \quad (138)$$

donde  $V_{\text{ca}}$  es el voltaje a circuito abierto en las terminales de la antena y  $E$  es la intensidad del campo eléctrico incidente. Debido al **teorema de reciprocidad** [13], el cual nos dice que los parámetros de una antena son los mismos ya sea que esta se use como emisora o receptora, ambas definiciones de longitud efectiva son equivalentes.

## 6.5. Área efectiva

Para una antena receptora, el **área efectiva** se define como la relación entre la potencia  $W$  entregada por la antena a sus terminales y la densidad de potencia  $P$  en el punto del espacio en donde está situada

$$A_{\text{ef}} = \frac{W}{P}. \quad (139)$$

La ecuación anterior da una idea de la superficie efectiva del frente de onda del que una antena puede captar energía. Esta definición le da a la antena el carácter de **transductor**, es decir, la capacidad de convertir energía electromagnética en energía eléctrica. El valor de  $W$  corresponde a la mejor situación para la recepción. Es decir, se debe cumplir que:

- La antena debe entregar toda la potencia a la carga (no debe haber reflexiones).
- La antena y el campo deben tener la misma polarización.
- La antena no debe tener pérdidas (antena ideal con eficiencia del 100%).

Se puede demostrar que hay una relación entre el área efectiva y la directividad [13]

$$A_{\text{ef}} = \frac{D \lambda^2}{4\pi}. \quad (140)$$

Si la antena no está orientada en la dirección de máxima recepción tenemos que

$$A_{\text{ef}} = \frac{G_D \lambda^2}{4\pi}. \quad (141)$$

## 6.6. Impedancia característica

Una antena conectada a un generador mediante una línea de transmisión luce como una impedancia de carga compleja  $Z_a = R_a + jX_a$  [13]. La parte reactiva  $X_a$  representa la energía almacenada en el campo en las cercanías de la antena, mientras que la parte resistiva  $R_a$  se origina tanto por las pérdidas por efecto Joule en los conductores del dispositivo, como por la potencia radiada al espacio (caracterizada por la resistencia de radiación). Un cálculo preciso de estas cantidades puede ser una tarea compleja. No obstante, como vimos anteriormente, en el caso del dipolo de media onda esta impedancia es resistiva e igual a la resistencia de radiación, es decir,  $Z_a = R_{\text{rad}}$ .

## 6.7. Ancho de banda

El ancho de banda es un parámetro muy importante que caracteriza a una antena. Hay antenas que está optimizadas sólo para trabajar a una dada frecuencia, mientras que otras pueden operar en una rango muy amplio manteniendo sus parámetros característicos (patrón de radiación, eficiencia, etc) casi inalterados.

## 6.8. Fórmula de Friis

La **fórmula de Friis** es una relación que vincula la transmisión entre una antena emisora y otra receptora, considerando que la eficiencia de ambas es 100 %. Consideremos que una antena emisora de ganancia directiva  $G_T$  y que está conectada a un transmisor, radía una potencia total  $W_T$ . A una distancia  $r$  de la misma se encuentra una antena receptora en cuya posición la densidad de potencia será

$$P_r = \frac{W_T G_T}{4\pi r^2}. \quad (142)$$

La antena receptora convierte esta densidad de potencia en potencia eléctrica  $W_R$ , la cual está dada por la siguiente expresión

$$W_R = A_R P_r, \quad (143)$$

donde  $A_R$  es el área efectiva de la antena receptora. Eliminando  $P_r$  entre ambas ecuaciones obtenemos la fórmula de Friis

$$\frac{W_R}{W_T} = \frac{A_R G_T}{4\pi r^2}. \quad (144)$$

A la ecuación anterior también se la conoce como relación de transferencia de potencia. De acuerdo al teorema de reciprocidad, podemos cambiar el rol que cumplen las antenas y escribir que

$$\frac{W_R}{W_T} = \frac{A_T G_R}{4\pi r^2}. \quad (145)$$

Luego usando (141) podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{W_R}{W_T} = \frac{A_T A_R}{\lambda^2 r^2} = \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi r)^2}. \quad (146)$$

Si las antenas están orientadas para emitir y recibir en las direcciones de máxima ganancia directiva, entonces la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{W_R}{W_T} = \frac{D_T D_R \lambda^2}{(4\pi r)^2}. \quad (147)$$

La ecuación de transferencia de potencia tiene dos limitaciones:

- a) Es una relación de campo lejano, por lo tanto no se aplica para  $r$  pequeño. Sin embargo se puede demostrar que es una buena aproximación para

$$r \geq \frac{2d^2}{\lambda}, \quad (148)$$

donde  $d$  representa la máxima dimensión lineal de la antena.

- b) La relación es válida para enlaces en el espacio vacío. Es decir, sin obstáculos entre la antena emisora y la receptora.

Si las eficiencias de las antenas no son del 100 %, entonces la ecuación de transferencia de potencia se escribe como

$$\frac{W_R}{W_T} = \frac{D_T D_R \lambda^2}{(4\pi r)^2} \varepsilon_T \varepsilon_R. \quad (149)$$

## 6.9. Atenuación en el espacio vacío

Un parámetro muy útil es la **atenuación en el espacio vacío**. Esta se define como

$$\alpha = \frac{(4\pi r)^2}{\lambda^2}, \quad (150)$$

que también puede escribirse como

$$\alpha = \frac{(4\pi r)^2 \nu^2}{c^2}, \quad (151)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia y  $c$  la velocidad de la luz. Si  $r$  está dada en km y la frecuencia en MHz tenemos que

$$\alpha = 1,75 \times 10^3 r^2 \nu^2. \quad (152)$$

Esta ecuación en decibelios es

$$\alpha = 10 \log(1,75 \times 10^3) + 10 \log r^2 + 10 \log \nu^2 = 32,4 + 20 \log r + 20 \log \nu. \quad (153)$$

Usando la expresión anterior, la ecuación de transferencia de potencia se puede escribir simplemente como

$$\frac{W_R}{W_T} = D_T + D_R - \alpha, \quad (154)$$

donde todas las cantidades anteriores están dadas en decibelios. El cálculo de  $\alpha$  se facilita usando el nomograma dado en la página 134 de la referencia [12].

## Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).

- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).
- [7] M. I. Prieto and M. Quintillán, *Am. J. Phys.* **57**, 277 (1989).
- [8] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, **Finite Element Method for Electromagnetics**. IEEE Press (1998).
- [9] Rodolfo N. Vela, **Líneas de transmisión**. McGraw-Hill (1999).
- [10] Ing. Alejandro Nuñez, **Método de Acoplamiento de Impedancias en Líneas de Transmisión**.
- [11] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands, **The Feynman Lectures on Physics**. Addison-Wesley (1977).
- [12] Jorge R. Sosa Pedroza, **Radiación electromagnética y antenas**. Limusa (1991).
- [13] S. J. Orfanidis, **Electromagnetic Waves and Antennas**. Rutgers University (1999).