

# Unidad 1

## Teoría de campo

9 de abril de 2018

### 1. Campos escalares y vectoriales

Un campo es una función matemática del espacio y el tiempo. En particular, un **campo escalar** es una función que en cada instante de tiempo, tiene un valor definido en cada punto del espacio. Un ejemplo típico es el campo de temperatura  $T(x, y, z, t)$  de un objeto material, donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas cartesianas de posición y  $t$  es tiempo. Por otro lado, en un **campo vectorial** cada punto del espacio tiene asignado un vector. Un ejemplo es el campo de velocidad  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$  de un fluido que se mueve en el interior de un tubo. Si un campo es estacionario entonces no habrá una dependencia con  $t$ .

Un caso especial son los campos que no están acotados, como por ejemplo

$$g(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x - y}. \quad (1)$$

Notemos que existe una singularidad cuando  $x = y$ . En la teoría electromagnética nos toparemos con este tipo de funciones, en especial con el campo eléctrico producido por cargas puntuales.

### 2. Sistema de coordenadas

Debido a que en muchos problemas físicos hay simetrías involucradas, es posible encontrar soluciones simples a las ecuaciones del electromagnetismo expresándolas en un sistema de referencia adecuado. Los tres más conocidos son los sistemas de coordenadas **cartesianas**  $(x, y, z)$ , **circulares cilíndricas**  $(\rho, \phi, z)$  y **esféricas**  $(r, \theta, \phi)$ , los cuales se muestran en la figura 1. En cada uno de estos sistemas de coordenadas un vector arbitrario  $\mathbf{A}$  quedará expresado como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z && \text{(Cartesianas)} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{a}_\rho A_\rho + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z && \text{(Circulares cilíndricas)} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi && \text{(Esféricas),} \end{aligned} \quad (2)$$

donde los vectores unitarios  $\mathbf{a}$  son perpendiculares entre si en cada punto del espacio. En cada caso, el módulo del vector  $\mathbf{A}$  estará dado simplemente por

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} && \text{(Cartesianas)} \\ A &= \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2} && \text{(Circulares cilíndricas)} \\ A &= \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2} && \text{(Esféricas).} \end{aligned} \quad (3)$$

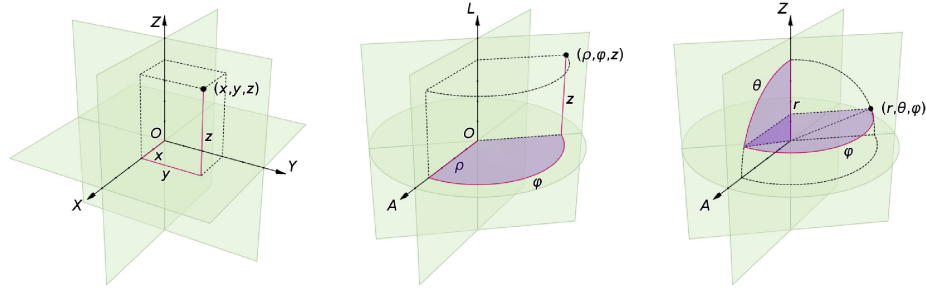


Figura 1: Sistemas de coordenadas ortogonales: (a) cartesianas [izquierda], (b) circulares cilíndricas [centro] y (c) esféricas [derecha].

Estos sistemas de coordenadas y muchos otros son casos particulares de lo que se conoce como **sistema de coordenadas ortogonales generalizadas**. En general un punto  $P$  en el espacio quedará determinado mediante tres variables coordenadas  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . Este punto corresponde a la intersección de las tres superficies constantes  $u_1 = C_1$ ,  $u_2 = C_2$  y  $u_3 = C_3$ . La intersección de un par de estas superficies define una línea coordenada, como por ejemplo la correspondiente a  $u_1$  la cual está definida por la intersección entre  $u_2 = C_2$  y  $u_3 = C_3$ . Los vectores unitarios  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$  son perpendiculares entre si y tangentes a las líneas de coordenadas. Finalmente, un vector puede expresarse en función de sus componentes generalizadas como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3 \quad (\text{Coordenadas generalizadas}) \quad (4)$$

y su módulo por

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (\text{Coordenadas generalizadas}). \quad (5)$$

### 3. Elementos diferenciales de espacio

Como veremos más adelante, algunas de las ecuaciones del electromagnetismo pueden escribirse en forma integral. Por este motivo son importantes las expresiones de las integrales de línea, superficie y volumen en los diferentes sistemas de coordenadas ortogonales. En general, a partir de un punto en el espacio  $P(u_1, u_2, u_3)$ , es posible realizar los desplazamientos diferenciales  $dl_1$ ,  $dl_2$  y  $dl_3$  de las superficies coordenadas por medio de los cambios diferenciales  $du_1$ ,  $du_2$  y  $du_3$ . Las relaciones entre los elementos de longitud y los cambios diferenciales en las variables vienen dadas por

$$dl_1 = h_1 du_1 \quad dl_2 = h_2 du_2 \quad dl_3 = h_3 du_3, \quad (6)$$

donde  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  son los **coeficientes métricos**. Para los tres principales sistemas de coordenadas ortogonales estos coeficientes son

$$\begin{aligned} h_x = 1 \quad h_y = 1 \quad h_z = 1 & \quad (\text{Cartesianas}) \\ h_\rho = 1 \quad h_\phi = \rho \quad h_z = 1 & \quad (\text{Circulares cilíndricas}) \\ h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\phi = r \sin \theta & \quad (\text{Esféricas}). \end{aligned} \quad (7)$$

Un **elemento de volumen** en el entorno de  $P$  puede escribirse como  $dv = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ , por lo que para cada sistema de coordenadas tendremos que

$$\begin{aligned} dv &= dx \, dy \, dz & (\text{Cartesianas}) \\ dv &= \rho \, d\rho \, d\phi \, dz & (\text{Circulares cilíndricas}) \\ dv &= r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi & (\text{Esféricas}). \end{aligned} \quad (8)$$

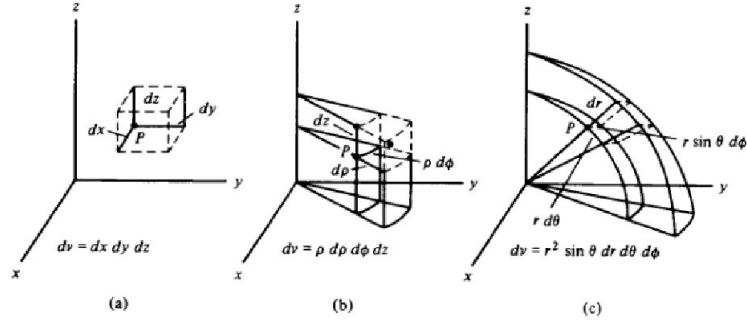


Figura 2: Elementos diferenciales de volumen en coordenadas (a) cartesianas, (b) circulares cilíndricas y (c) esféricas.

Teniendo en cuenta la figura 2 es fácil demostrar las relaciones anteriores.

Por otro lado, un **elemento de superficie** puede expresarse en forma escalar como  $ds$ , o en forma vectorial como  $d\mathbf{s}$  tomando una dirección normal a la superficie que lo contiene. Por ejemplo, un elemento diferencial en la superficie  $u_1 = C_1$  estará dado por  $ds_1 = dl_2 dl_3 = h_2 h_3 du_2 du_3$  o  $d\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_1 ds_1$ .

## 4. Representación de campos (opcional)

### 4.1. Campos escalares

Los campos escalares pueden ser representados por medio de **curvas o superficies de nivel**, también llamadas **superficies equipotenciales** si la función representa a un campo potencial. Si  $g(u_1, u_2, u_3)$  es un campo escalar, matemáticamente sus curvas de nivel estarán dadas por

$$g(u_1, u_2, u_3) = C, \quad (9)$$

donde  $C$  toma un valor constante. Cada curva de nivel está asociada a un valor particular de  $C$ .

Por ejemplo, como veremos más adelante, el campo potencial debido a una carga puntual situada en el origen de coordenadas tiene simetría radial y es de la forma

$$\phi = \frac{k}{r}, \quad (10)$$

donde  $k$  es una constante ( $k$  es proporcional al valor de la carga puntual). Igualando este potencial a  $C$  obtenemos una familia de funciones  $r = k/C = \text{constante}$ , las cuales representan superficies esféricas centradas en el origen de coordenadas. La figura 3 (a) muestra las curvas de nivel correspondiente al plano  $z = 0$  para  $k = 1$ .

Otro ejemplo interesante es el potencial debido a dos cargas de la misma magnitud pero con signos opuestos, las cuales se encuentran situadas sobre el eje  $x$ , pero cada una de ellas separadas una distancia  $d$  del origen de coordenadas,

$$\phi = \frac{k}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} - \frac{k}{\sqrt{(d+x)^2 + y^2}}. \quad (11)$$

La figura 3 (b) muestra, para  $d = 2$  y  $k = 1$ , las curvas de nivel de este potencial en el plano  $z = 0$ . Con color rojo (azul) se representan los potenciales positivos (negativos). Por último, en

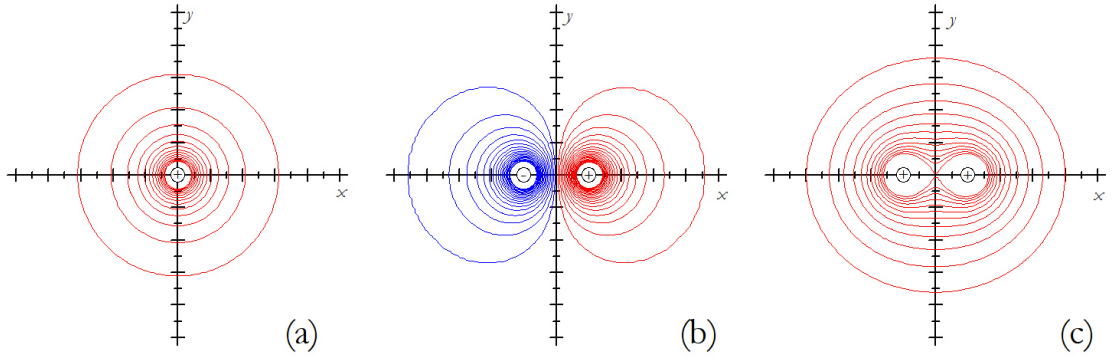


Figura 3: Curvas de nivel en el plano  $z = 0$ , para el potencial debido a (a) una carga puntual positiva, (b) un par de cargas de la misma magnitud pero con signos opuestos y (c) un par de cargas positivas iguales.

la figura 3 (c) podemos apreciar las curvas de nivel para una configuración igual a la anterior, sólo que esta vez ambas cargas son positivas y el potencial está dado por

$$\phi = \frac{k}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} + \frac{k}{\sqrt{(d+x)^2 + y^2}}. \quad (12)$$

## 4.2. Campos vectoriales

Hay diferentes forma de representar un campo vectorial. La más conocida es la representación mediante **líneas de flujo**. En cada punto del espacio las líneas de flujo se construyen de acuerdo a las siguientes reglas:

- La dirección de una línea de flujo debe coincidir con la del vector de campo.
- La densidad transversal de una línea de flujo debe ser igual a la magnitud del vector de campo.

Estas líneas empiezan y terminan en lo que se denominan, respectivamente, fuentes y sumideros.

Dado un campo vectorial  $\mathbf{A}$  es posible calcular la ecuación de estas líneas de flujo. Si  $d\mathbf{l}$  es un diferencial de longitud de una línea de flujo, entonces para alguna constante  $k$  se debe cumplir que

$$\mathbf{A} = k d\mathbf{l}. \quad (13)$$

En coordenadas generalizadas esta ecuación luce como

$$\mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3 = \mathbf{a}_1 k h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 k h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 k h_3 du_3. \quad (14)$$

Igualando componente a componente obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} A_1 &= k h_1 du_1 \\ A_2 &= k h_2 du_2 \\ A_3 &= k h_3 du_3, \end{aligned}$$

de las cuales se puede deducir que

$$\frac{A_1}{h_1 du_1} = \frac{A_2}{h_2 du_2} = \frac{A_3}{h_3 du_3}. \quad (15)$$

Solucionando este sistema de ecuaciones es posible encontrar la función que representa a las líneas de flujo (esto es una aproximación pues esta función es tangente al campo en cada punto del espacio, pero su densidad transversal no es igual a la magnitud de este).

Como ejemplo consideremos nuevamente una carga puntual situada en el origen de coordenadas. Al igual que el campo potencial escalar (10), el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  generado por esta carga tiene simetría radial y en coordenadas esféricas se escribe como

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{k}{r^2} = \mathbf{a}_r E_r. \quad (16)$$

Como las otras dos componentes son nulas,  $E_\theta = E_\phi = 0$ , entonces de (15) tenemos que

$$\frac{h_\theta}{h_r} \frac{d\theta}{dr} = \frac{E_\theta}{E_r} = 0 \quad (17)$$

y

$$\frac{h_\phi}{h_r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{E_\phi}{E_r} = 0, \quad (18)$$

lo que implica que una línea de flujo está dada por

$$\theta = C_1 \quad \phi = C_2 \quad (\text{para todo } r), \quad (19)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Las relaciones (19) representan rectas que surgen del origen de coordenadas, las cuales para el plano  $z = 0$  se muestran en la figura 4 (a).

Un resultado equivalente se obtiene si el campo eléctrico (16) se escribe en coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z), \quad (20)$$

y aplicamos nuevamente las relaciones (15),

$$\frac{x}{dx} = \frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}. \quad (21)$$

En el plano  $z = 0$  las ecuaciones anteriores pueden fácilmente integrarse para dar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + C, \quad (22)$$

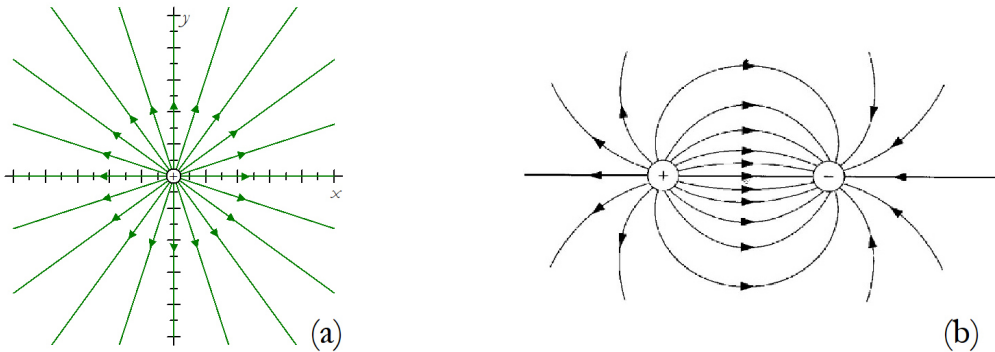


Figura 4: Líneas de flujo del campo eléctrico en el plano  $z = 0$  para (a) una carga puntual positiva y (b) un par de cargas de la misma magnitud pero con signos opuestos.

donde  $C$  es una constante. La ecuación anterior es equivalente a la recta  $y = C'x$ , cuya pendiente es  $C' = \exp(C)$ .

Finalmente, la figura 4 (b) muestra las líneas de flujo del campo eléctrico correspondientes a dos cargas puntuales de igual magnitud pero con diferentes signos, las cuales están separadas por una distancia finita. En este caso la fuente es la carga positiva y la negativa es el sumidero.

## 5. Integración de vectores

En teoría de campo la integración en el espacio comprende integrales a lo largo de líneas, superficies y volúmenes del tipo

$$\int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Integral de línea}) \quad (23)$$

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Integral de superficie}) \quad (24)$$

$$\int_V g \, dv \quad (\text{Integral de volumen}). \quad (25)$$

Para un determinado sistema de coordenadas los elementos diferenciales de línea, de superficie y de volumen deben expresarse como se indicó en la sección 3.

Veamos algunos ejemplos:

- 1- Calcular la integral de línea cerrada

$$I = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (26)$$

donde el campo  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x y^2 + \mathbf{a}_y 2x(y+1) + \mathbf{a}_z xz$  y la trayectoria cerrada  $l$  es el perímetro de un triángulo cuyos vértices son los puntos  $(1, 1, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$  y  $(2, 2, 0)$ , ver figura 5 (a).

**Solución:** En coordenadas cartesianas, el diferencial de longitud está dado por  $d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz$  y la integral (26) se puede reescribir como

$$I = \oint_l (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \quad (27)$$

Separaremos la trayectoria  $l$  en tres segmentos:  $l_1$ , que va de  $(1, 1, 0)$  a  $(2, 1, 0)$ ,  $l_2$  de  $(2, 1, 0)$  a  $(2, 2, 0)$ , y  $l_3$  de  $(2, 2, 0)$  a  $(1, 1, 0)$  [notemos que la trayectoria está contenida en el plano  $(x, y)$ , por lo que  $dz = 0$ ]. Para el primer segmento tenemos que  $y = 1$  y  $dy = 0$ , por lo que

$$\int_{l_1} A_x dx = \int_1^2 dx = x \Big|_1^2 = 1. \quad (28)$$

En forma similar, para el segundo segmento  $x = 2$  y  $dx = 0$  y

$$\int_{l_2} A_y dy = \int_1^2 2x(y+1) dy = 2(y^2 + 2y) \Big|_1^2 = 10. \quad (29)$$

Por otro lado, para el tercer segmento tenemos que  $x = y$  lo que implica que  $dx = dy$ . De esta forma

$$\int_{l_3} (A_x dx + A_y dy) = \int_2^1 [x^2 + 2x(x+1)] dx = x^3 + x^2 \Big|_2^1 = -10. \quad (30)$$

Finalmente, el valor de la integral de línea (26) es  $I = 1 + 10 - 10 = 1$ .

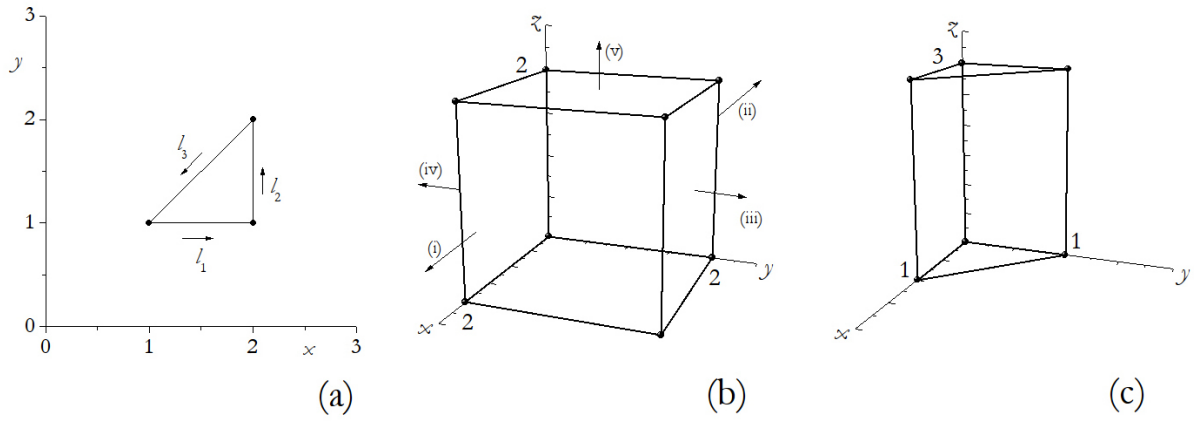


Figura 5: (a) Trayectoria de integración en el plano  $z = 0$ , (b) superficies del cubo de lado 2 y (c) región de integración en forma de prisma.

- 2- Calcular la integral de superficie (24) para el campo  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2xz + \mathbf{a}_y (x + 2) + \mathbf{a}_z y(z^2 - 3)$ , sobre las cinco caras (exceptuar la cara inferior) del cubo mostrado en la figura 5 (b).

**Solución:** Calcularemos por separado las contribuciones de cada una de las caras:

- (i) Sobre esta cara  $x = 2$  y  $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_x dy dz$ , por lo tanto

$$I_i = \int_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 dz \int_0^2 dy 2xz = 2x \int_0^2 z dz \int_0^2 dy = 16. \quad (31)$$

- (ii) Sobre esta cara  $x = 0$  y  $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_x dy dz$ , por lo tanto

$$I_{ii} = \int_{S_{ii}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^2 dz \int_0^2 dy 2xz = 0. \quad (32)$$

- (iii) Sobre esta cara  $y = 2$  y  $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_y dx dz$ , entonces

$$I_{iii} = \int_{S_{iii}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (x + 2) dx \int_0^2 dz = 12. \quad (33)$$

- (iv) Sobre esta cara  $y = 0$  y  $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_y dx dz$ , entonces

$$I_{iv} = \int_{S_{iv}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^2 (x + 2) dx \int_0^2 dz = -12. \quad (34)$$

- (v) Sobre esta cara  $z = 2$  y  $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z dx dy$ , entonces

$$I_v = \int_{S_v} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 y dy \int_0^2 dx = 4. \quad (35)$$

De esta forma el resultado final es  $I_i + I_{ii} + I_{iii} + I_{iv} + I_v = 20$

- 3- Calcular la integral de volumen (25) para el campo  $g = xyz^2$ , dentro del prisma mostrado en la figura 5 (c).

**Solución:** Notemos que los límites de integración para  $z$  son 0 y 3, para  $y$  son 0 y 1, y para  $x$  son 0 y  $(1 - y)$ . Por lo tanto

$$\int_V g \, dv = \int_0^3 z^2 \, dz \int_0^1 y \, dy \int_0^{1-y} x \, dx = \int_0^3 z^2 \, dz \int_0^1 y \frac{(1-y)^2}{2} \, dy = \frac{3}{8}. \quad (36)$$

Finalmente, una integral muy importante es la que representa el **flujo neto de un campo** vectorial  $\mathbf{A}$  a través de una dada superficie cerrada  $S$ ,

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (37)$$

En este caso por convención se toma el sentido de  $d\mathbf{s}$  hacia afuera del volumen  $V$  encerrado por  $S$ .  $\Phi$  puede interpretarse como una medida de la cantidad neta de líneas de flujo del campo que entran y salen del volumen  $V$ . Si tomamos por ejemplo la figura 4 (b), vemos que  $\Phi = 0$  si la superficie de integración no encierra a ninguna o encierra a ambas cargas,  $\Phi > 0$  si  $S$  contiene a la carga positiva y  $\Phi < 0$  si  $S$  contiene a la carga negativa.

## 6. Teoremas importantes de la teoría de campos

En esta sección se compilan algunas de las definiciones y de los teoremas del análisis vectorial que son de gran importancia para el electromagnetismo.

### 6.1. Diferenciación de campos vectoriales

Si  $\mathbf{F}(u)$  es una función vectorial de una sola variable escalar  $u$ , su derivada vectorial ordinaria con respecto a  $u$  se define por el límite

$$\frac{d\mathbf{F}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(u + \Delta u) - \mathbf{F}(u)}{\Delta u} = \mathbf{a}_1 \frac{dF_1}{du} + \mathbf{a}_2 \frac{dF_2}{du} + \mathbf{a}_3 \frac{dF_3}{du}. \quad (38)$$

La regla para derivar el producto de una función escalar y una vectorial, es semejante a la empleada en el cálculo con escalares

$$\frac{d(g\mathbf{F})}{du} \equiv \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(g + \Delta g)(\mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}) - g\mathbf{F}}{\Delta u} = g \frac{d\mathbf{F}}{du} + \mathbf{F} \frac{dg}{du}. \quad (39)$$

Si  $\mathbf{F}$  es una función de más de una variable, se define su derivada parcial respecto a una cualquiera de sus variables (por ejemplo  $u_1$ ) como

$$\frac{\partial \mathbf{F}(u_1, u_2, \dots)}{\partial u_1} \equiv \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(u_1 + \Delta u_1, u_2, \dots) - \mathbf{F}(u_1, u_2, \dots)}{\Delta u_1}. \quad (40)$$

Las diferenciaciones parciales sucesivas dan funciones del tipo  $\partial^2 \mathbf{F} / \partial u_1^2$ ,  $\partial^2 \mathbf{F} / (\partial u_1 \partial u_2)$ , etc... Un resultado importante es que si  $\mathbf{F}$  tiene derivadas parciales continuas de al menos segundo orden, entonces es lícito intercambiar el orden de diferenciación

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u_2 \partial u_1}. \quad (41)$$

Finalmente, a partir de la definición (40) es posible demostrar las siguientes identidades:

$$\frac{\partial(g\mathbf{F})}{\partial u} = g \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \mathbf{F} \frac{\partial g}{\partial u} \quad (42)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{G} \cdot \mathbf{F})}{\partial u} = \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u} \quad (43)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{G} \times \mathbf{F})}{\partial u} = \mathbf{G} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u} \times \mathbf{F}. \quad (44)$$



## 6.2. Gradiente de un campo escalar

En algunos problemas es de gran utilidad conocer la rapidez o velocidad con que cambia un campo escalar  $f(u_1, u_2, u_3, t)$  en una determinada dirección del espacio. Supongamos que, para un tiempo constante  $t$ , estamos interesados en la variación de esta función entre los puntos  $P$  y  $Q$ , los cuales están separados por un diferencial de longitud vectorial

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_1 dl_1 + \mathbf{a}_2 dl_2 + \mathbf{a}_3 dl_3 = \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3. \quad (45)$$

El cambio diferencial correspondiente en  $f$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \\ df &= \frac{\partial f}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3} dl_3, \end{aligned} \quad (46)$$

o

$$df = \left[ \mathbf{a}_1 \frac{\partial f}{\partial l_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial f}{\partial l_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial f}{\partial l_3} \right] \cdot (\mathbf{a}_1 dl_1 + \mathbf{a}_2 dl_2 + \mathbf{a}_3 dl_3). \quad (47)$$

La cantidad entre corchetes es un vector denominado **gradiente** de la función  $f$ , el cual se puede expresar como

$$\mathbf{grad} f \equiv \mathbf{a}_1 \frac{\partial f}{\partial l_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial f}{\partial l_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial f}{\partial l_3}, \quad (48)$$

o en forma equivalente

$$\boxed{\mathbf{grad} f \equiv \mathbf{a}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \mathbf{a}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \mathbf{a}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3}}. \quad (49)$$

De esta forma el cambio diferencial en  $f$  queda

$$df = (\mathbf{grad} f) \cdot d\mathbf{l}. \quad (50)$$

A partir de esta expresión podemos deducir tres propiedades:

- El vector **grad** $f$  es perpendicular a cualquier superficie  $f = cte$ . Esto se comprueba notando que el producto escalar con  $d\mathbf{l}$  es igual a cero (ya que  $df = 0$ ).
- Si  $d\mathbf{l}$  apunta en la misma dirección de **grad** $f$ , se obtiene el máximo cambio en  $df$ . Es decir, el vector **grad** $f$  indica tanto la magnitud como la dirección de máxima rapidez de cambio de la función escalar  $f$ .
- La integral de línea de **grad** $f$  a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero:

$$\oint (\mathbf{grad} f) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (51)$$

Esta propiedad se demuestra observando que la integral de línea entre dos puntos cualesquiera  $P$  y  $Q$ , depende sólo de la diferencia de los valores de la función  $f$  en dichos puntos. De hecho, teniendo en cuenta (50), vemos que

$$\int_P^Q (\mathbf{grad} f) \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q df = f_Q - f_P, \quad (52)$$

donde  $f_P$  y  $f_Q$  simbolizan los valores de  $f$  en los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Si  $P = Q$  (trayectoria cerrada), queda demostrada la propiedad (51).

Usando (49) y los coeficientes métricos adecuados dados en (7), es posible escribir el vector **grad** $f$  en los tres principales sistemas de coordenadas ortogonales:

$$\mathbf{grad}f = \mathbf{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{Cartesianas}) \quad (53)$$

$$\mathbf{grad}f = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{Circulares cilíndricas}) \quad (54)$$

$$\mathbf{grad}f = \mathbf{a}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{Esféricas}). \quad (55)$$

Finalmente, definiendo el operador  $\nabla$  llamado **nabla** (o **del**) como

$$\nabla \equiv \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (56)$$

es posible reescribir el **grad** $f$  en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$\mathbf{grad}f \equiv \nabla f = \mathbf{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (57)$$

### 6.3. Divergencia de un campo vectorial

La **divergencia de un campo vectorial**  $\mathbf{F}$ , o  $\text{div}\mathbf{F}$ , se define como el límite

$$\text{div}\mathbf{F} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (58)$$

donde  $S$  es la superficie que encierra al volumen  $\Delta v$ . Es decir, la expresión anterior representa el flujo neto (hacia afuera) por unidad de volumen, del campo vectorial  $\mathbf{F}$  a través de la superficie  $S$ , conforme el volumen  $\Delta v$  tiende a cero. Se puede demostrar que la forma de  $S$  no tiene efecto sobre el límite (58).

Las expresiones de la  $\text{div}\mathbf{F}$  en los diferentes sistemas de coordenadas pueden obtenerse a partir de

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right], \quad (59)$$

donde  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  son las componentes de  $\mathbf{F}$  en el sistema de coordenadas generalizado. Una demostración de esta identidad puede consultarse en la referencia [1] (página 90). Entonces usando los coeficientes métricos adecuados dados en (7), obtenemos

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{Cartesianas}) \quad (60)$$

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{Circulares cilíndricas}) \quad (61)$$

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{Esféricas}). \quad (62)$$

Como en el caso del gradiente de una función escalar, la divergencia en coordenadas cartesianas puede escribirse usando el operador nabla

$$\text{div}\mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (63)$$

De acuerdo a su definición, la divergencia de un campo vectorial es cero en una región del espacio en la cual del elemento diferencial de volumen entran y salen la misma cantidad de líneas de flujo. Sin embargo, la divergencia no es nula para puntos en donde hay una fuente o un sumidero de campo.

## 6.4. Teorema de la divergencia

Si  $\mathbf{F}(u_1, u_2, u_3, t)$  es un campo vectorial bien definido, entonces la identidad

$$\boxed{\int_V (\text{div} \mathbf{F}) dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}, \quad (64)$$

es verdadera para la superficie cerrada  $S$  que limita a un volumen  $V$  arbitrario. Esta expresión nos dice que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada, es igual a la integral de volumen de su divergencia. A la identidad (64) se la denomina **teorema de la divergencia**.

Una demostración heurística consiste en subdividir  $V$  en una cantidad grande  $n$  de elementos de volumen  $\Delta v_i$  (suponga que son cubos de dimensiones muy pequeñas). De acuerdo a la definición de divergencia (58), el flujo neto en cada uno de estos elementos será

$$(\text{div} \mathbf{F}) \Delta v_i = \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (65)$$

donde  $S_i$  es la superficie que encierra a  $\Delta v_i$ . Sumando los flujos correspondientes a los  $n$  elementos de volumen, obtenemos el flujo total a través de  $S$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right] = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (66)$$

Este resultado se debe a la cancelación de todos los flujos interiores, correspondientes a los elementos de volumen que comparten una misma superficie exterior. Por otro lado, sumando los términos del lado izquierdo de (65) y tomando el límite con  $\Delta v_i \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\text{div} \mathbf{F}) \Delta v_i = \int_V (\text{div} \mathbf{F}) dv. \quad (67)$$

Esto prueba que la identidad (64) es correcta. Para que sea válido el procedimiento anterior, se ha supuesto que tanto  $\mathbf{F}$  como sus primeras derivadas son continuas en  $V$ .

## 6.5. Rotacional de un campo vectorial

Como vimos anteriormente, la integral de línea de  $\mathbf{grad} f$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada (circulación) siempre es cero. Todos los campos vectoriales que cumplen con esta propiedad se denominan **campos conservativos**. No obstante, en general existen **campos no conservativos** para los cuales la circulación es diferente de cero al menos para algunas trayectorias cerradas en el espacio. En este contexto tiene sentido definir lo que se denomina **rotacional del campo vectorial**  $\mathbf{F}$ , o  $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ , el cual es un nuevo campo vectorial. En coordenadas generalizadas tenemos que

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{a}_1 [\mathbf{rot} \mathbf{F}]_1 + \mathbf{a}_2 [\mathbf{rot} \mathbf{F}]_2 + \mathbf{a}_3 [\mathbf{rot} \mathbf{F}]_3, \quad (68)$$

donde cada una de estas componentes se definen como los límites

$$\mathbf{a}_1 [\mathbf{rot} \mathbf{F}]_1 \equiv \mathbf{a}_1 \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s_1} \quad (69)$$

$$\mathbf{a}_2 [\mathbf{rot} \mathbf{F}]_2 \equiv \mathbf{a}_2 \lim_{\Delta s_2 \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s_2} \quad (70)$$

$$\mathbf{a}_3 [\mathbf{rot} \mathbf{F}]_3 \equiv \mathbf{a}_3 \lim_{\Delta s_3 \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s_3}. \quad (71)$$

La circulación para cada una de estas componentes, por ejemplo (69), se realiza sobre una trayectoria  $l_1$  contenida en el plano  $u_1 = \text{cte}$ , y que encierra el elemento de superficie  $\Delta s_1$ . El sentido de integración se elige con la regla de la mano derecha, señalando con el pulgar en el mismo sentido que apunta  $\mathbf{a}_1$ . De esta forma, cada componente del  $\mathbf{rotF}$  corresponde a una circulación por unidad de área, tomada sobre las superficies coordenadas.

La expresión diferencial en coordenadas generalizadas para el  $\mathbf{rotF}$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{rotF} = & \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial u_3} \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_1} \right] + \\ & + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial u_2} \right], \end{aligned} \quad (72)$$

la cual se puede escribir como el determinante

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} & \frac{\mathbf{a}_2}{h_1 h_3} & \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Una demostración de esta identidad puede consultarse en la referencia [1]. Usando los coeficientes métricos adecuados dados en (7), obtenemos el rotacional en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{rotF} = \mathbf{a}_x \left[ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] + \mathbf{a}_y \left[ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] + \mathbf{a}_z \left[ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right], \quad (74)$$

circulares cilíndricas

$$\mathbf{rotF} = \mathbf{a}_\rho \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right] + \mathbf{a}_\phi \left[ \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] + \frac{\mathbf{a}_z}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \quad (75)$$

y esféricas

$$\mathbf{rotF} = \frac{\mathbf{a}_r}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(F_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mathbf{a}_\theta}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right] + \frac{\mathbf{a}_\phi}{r} \left[ \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right]. \quad (76)$$

Como en el caso del gradiente de una función escalar o la divergencia de un campo vectorial, el rotacional en coordenadas cartesianas puede escribirse usando el operador nabla

$$\mathbf{rotF} \equiv \nabla \times \mathbf{F}. \quad (77)$$

Finalmente, es importante destacar dos resultados que usaremos repetidas veces. Por un lado, sea cual sea el campo vectorial considerado, la divergencia de su rotacional siempre será igual a cero,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (78)$$

Además, el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar  $f$  también siempre será igual a cero,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (79)$$

La demostración de ambas identidades es dejada como ejercicio para el alumno (problemas 8 y 9 de la última sección).

## 6.6. Teorema de Stokes

Si  $\mathbf{F}(u_1, u_2, u_3, t)$  es un campo vectorial bien definido, entonces la identidad

$$\boxed{\int_S (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}. \quad (80)$$

es verdadera para una superficie  $S$  limitada por la trayectoria cerrada  $l$ . A la identidad (80) se la denomina **teorema de la Stokes**. Como en el caso del teorema de la divergencia, es necesario que tanto  $\mathbf{F}$  como sus primeras derivadas sean continuas en la región de integración. Una demostración heurística del teorema de Stokes puede consultarse en la referencia [1] (página 107).

## 6.7. Campos que varían en el tiempo (opcional)

Si un campo vectorial  $\mathbf{A}$  depende del tiempo  $t$ , su variación temporal en un punto fijo del espacio se obtiene simplemente calculando la derivada parcial  $\partial \mathbf{A} / \partial t$ . Por otro lado, hay problemas en los cuales es necesario evaluar la rapidez de cambio de un campo para un punto del espacio que está en movimiento. Un ejemplo de este tipo surge cuando estamos interesados en calcular la tasa de cambio de la velocidad del viento (su aceleración), que debería medir un observador sentado sobre un bote que se mueve a una cierta velocidad sobre el mar. En este tipo de problemas es necesario calcular lo que se denomina **derivada total** del campo vectorial.

Consideremos el ejemplo anterior, donde  $\mathbf{v}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(w_x, w_y, w_z, x, y, z, t)$  es la velocidad del viento y  $\mathbf{w}$  la del bote (por simplicidad usaremos coordenadas cartesianas). La derivada total estará dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial w_x} \frac{dw_x}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial w_y} \frac{dw_y}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial w_z} \frac{dw_z}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (81)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial w_x} \frac{dw_x}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial w_y} \frac{dw_y}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial w_z} \frac{dw_z}{dt} &= [\mathbf{a}_w \cdot \nabla_w] \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= [\mathbf{w} \cdot \nabla] \mathbf{v}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{a}_w$  es la aceleración del bote y  $\nabla_w$  es el operador nabla definido sobre las componentes de velocidad del bote, entonces podemos reescribir (81) como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\mathbf{a}_w \cdot \nabla_w] \mathbf{v} + [\mathbf{w} \cdot \nabla] \mathbf{v}. \quad (82)$$

Las ideas anteriores se pueden generalizar para un campo arbitrario  $\mathbf{F}$  para el cual

$$\boxed{\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + [\mathbf{a} \cdot \nabla_v] \mathbf{F} + [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{F}}, \quad (83)$$

donde ahora  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración del punto del espacio en el cual se está calculando la derivada total. Si la aceleración es cero, se obtiene la denominada **derivada convectiva**

$$\boxed{\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{F}}. \quad (84)$$

Finalmente, si el campo es escalar, su derivada total será

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [\mathbf{a} \cdot \nabla_v] F + [\mathbf{v} \cdot \nabla] F. \quad (85)$$

## 6.8. Operador Laplaciano

En algunos problemas de teoría de campo es necesario calcular la divergencia del gradiente de una función escalar. Esta operación sirve para definir un nuevo operador llamado **Laplaciano**

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \quad (86)$$

En coordenadas generalizadas se puede demostrar que el Laplaciano puede escribirse como (para una demostración ver referencia [1] página 118)

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right]. \quad (87)$$

Dicho operador toma una forma simple en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (88)$$

Por otro lado, el Laplaciano se escribe en coordenadas circulares cilíndricas como

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (89)$$

mientras que en esféricas es igual a

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (90)$$

## 6.9. Teorema de Green

Consideremos un campo vectorial definido como  $\mathbf{F} = f \nabla g$ , donde  $f$  y  $g$  son dos campos escalares arbitrarios. Usando el teorema de la divergencia (64) obtenemos

$$\oint_S (f \nabla g) \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot (f \nabla g) dv. \quad (91)$$

Luego, empleando la identidad [ver (123) en sección Identidades vectoriales]

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla g) \cdot (\nabla f) + f(\nabla^2 g),$$

podemos reescribir (91) como

$$\oint_S (f \nabla g) \cdot d\mathbf{s} = \int_V [f \nabla^2 g + (\nabla g) \cdot (\nabla f)] dv. \quad (92)$$

El resultado anterior se conoce como la **primera identidad integral de Green**.

Si hubiésemos considerado el campo vectorial  $\mathbf{G} = g \nabla f$ , el procedimiento anterior nos habría conducido a un resultado similar en el cual los roles de  $f$  y  $g$  estarían intercambiados

$$\oint_S (g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = \int_V [g \nabla^2 f + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] dv. \quad (93)$$

Restando la ecuación anterior de (92) se obtiene la **segunda identidad integral de Green** o **teorema simétrico de Green**

$$\oint_S [f \nabla g - g \nabla f] \cdot d\mathbf{s} = \int_V [f \nabla^2 g - g \nabla^2 f] dv. \quad (94)$$

Las expresiones (92) y (94) son correctas para cualquier par de funciones  $f$  y  $g$  que estén bien comportadas en el volumen  $V$  limitado por  $S$ .

## 6.10. Teorema de unicidad

El **teorema de unicidad** nos dice que, si la divergencia y el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  son especificados en una región del espacio de volumen  $V$ , así como la componente normal de dicho campo sobre la superficie  $S$  que limita a  $V$  dada por  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ , entonces el campo  $\mathbf{F}$  es único.

La demostración de este teorema puede realizarse por el absurdo, suponiendo desde el principio que hay dos campos *distintos* que satisfacen las mismas especificaciones. Si estos dos campos son  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ , entonces se debería cumplir que dentro de  $V$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (95)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} \quad (96)$$

y en la superficie  $S$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}. \quad (97)$$

Para empezar construyamos un nuevo campo vectorial  $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{G}$ , el cual obviamente satisface las siguientes relaciones dentro de  $V$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{G}) = 0 \quad (98)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{F} - \mathbf{G}) = 0 \quad (99)$$

y

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (100)$$

en la superficie  $S$ . Como consecuencia de (99),  $\mathbf{H}$  se puede escribir como el gradiente de una función potencial

$$\mathbf{H} = \nabla \phi, \quad (101)$$

donde su divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla^2 \phi = 0. \quad (102)$$

Si aplicamos ahora la primera identidad de Green (92) para el caso particular en que  $f = g = \phi$ , obtenemos

$$\oint_S (\phi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) dv = \int_V |\nabla \phi|^2 dv = \int_V |\mathbf{H}|^2 dv. \quad (103)$$

Por la condición (100), y teniendo en cuenta que  $\mathbf{H} = \nabla \phi$ , vemos que la integral de superficie anterior se anula

$$\oint_S (\phi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (104)$$

y entonces

$$\int_V |\mathbf{H}|^2 dv = 0. \quad (105)$$

Ya que el integrando en (105) sólo puede ser mayor o igual que cero,  $|\mathbf{H}|^2 \geq 0$ , entonces la única forma de que se anule la integral es que  $\mathbf{H} = 0$  dentro de  $V$ . Esto prueba que los campos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  son idénticos en la región considerada, contradiciendo nuestra primera suposición.

## 6.11. Teorema de Helmholtz

Un resultado muy importante de la teoría de campo es el **teorema de Helmholtz**. Consideremos un campo vectorial  $\mathbf{F}$  bien definido en todo el espacio y que decae a cero cuando  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ . El teorema de Helmholtz nos dice cómo determinar la función  $\mathbf{F}$  en forma unívoca, si se conocen en todo el espacio tanto su divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{F} = D$  como su rotacional  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}$ , y además ambos campos  $D$  y  $\mathbf{C}$  decaen a cero más rápido que  $1/r^2$  conforme  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  [5, 2].

El procedimiento consiste primero en calcular las funciones

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (106)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (107)$$

y luego el campo  $\mathbf{F}$  se reconstruye de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (108)$$

Una prueba de este teorema puede consultarse en el apéndice B de la referencia [5]. Notemos que de acuerdo al teorema de unicidad, el campo que se obtiene debe ser único.

## 7. Identidades vectoriales

La siguiente es una lista de identidades algebraicas, integrales y diferenciales que son de gran utilidad en la teoría de campo [1, 2, 3, 4].

- Identidades algebraicas

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \quad (109)$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = -\mathbf{G} \times \mathbf{F} \quad (110)$$

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{H}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \quad (111)$$

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} + \mathbf{H}) = \mathbf{F} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{H} \quad (112)$$

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) \quad (113)$$

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}) = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \quad (114)$$

- Identidades integrales

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv \quad (115)$$

$$\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad (116)$$

$$\oint_S f(\nabla g) \cdot d\mathbf{s} = \int_V [f\nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] dv \quad (117)$$

$$\oint_S [f\nabla g - g\nabla f] \cdot d\mathbf{s} = \int_V [f\nabla^2 g - g\nabla^2 f] dv \quad (118)$$



- Identidades diferenciales

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (119)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (120)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G} \quad (121)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (122)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (123)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (124)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \quad (125)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (126)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (127)$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad (128)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (129)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (130)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (131)$$

$$\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g \quad (132)$$

**Nota:** en el capítulo 1 de **Introduction to Electrodynamics** [5], el alumno puede consultar un texto más detallado sobre los conceptos básicos de análisis vectorial y teoría de campo dados en esta unidad.

## Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).

# Problemas

1. Calcular la integral de línea de  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x x^2 + \mathbf{a}_y 2yz + \mathbf{a}_z y^2$  desde el origen  $(0, 0, 0)$  hasta el punto  $(1, 1, 1)$ , a lo largo de las siguientes trayectorias.
  - a)  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$ .
  - b)  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$ .
  - c) En línea recta de  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$ .
  - d) En un camino cerrado: primero siguiendo la trayectoria a) y luego regresando por b) en forma inversa.
2. Calcular el flujo total del campo  $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x(x-1)z + \mathbf{a}_y(x+1)z^2 + \mathbf{a}_z x^2 y$ , que pasa a través del cubo mostrado en la figura 5 (b).
3. Calcular las siguientes integrales de superficie.
  - a) Flujo neto del campo  $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r k/r$  a través de la superficie esférica de radio  $a$  centrada en el origen.
  - b) Flujo del campo  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho k/\rho^2$  a través de la superficie cilíndrica de radio  $a$  y longitud  $l$ , cuyo eje coincide con el eje  $z$ .
  - c) Flujo del campo  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r\theta^2(1+\phi) + \mathbf{a}_\theta \cos(r)\sin(\phi) + \mathbf{a}_\phi r\theta$  a través del casquete esférico de radio  $a$ , que está centrado en el origen y en la región del espacio  $z \geq 0$ .
4. Calcular el gradiente de los siguientes campos escalares.
  - a)  $g(x, y, z) = -xy + 3zy + 4xz$ .
  - b)  $t(\rho, \phi, z) = \rho^2(1+z) + \tan(\phi)$ .
  - c)  $w(r, \theta, \phi) = r + 6\cos(\theta)$ .
5. Calcular la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales.
  - a)  $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{a}_y (x+y)^2$ .
  - b)  $\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{a}_x (x+y) + \mathbf{a}_y (z+y) + \mathbf{a}_z (x+z)$ .
  - c)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y z + \mathbf{a}_z x$ .
  - d)  $\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = \mathbf{a}_\rho (\phi^2 + z) + \mathbf{a}_\phi \sin(z) + \mathbf{a}_z z^2$ .
  - e)  $\mathbf{N}(r, \theta, \phi) = \mathbf{a}_r \tan(\phi) + \mathbf{a}_\theta (r+5)^2 + \mathbf{a}_\phi \cos(\phi)$ .
6. Comprobar que el teorema de la divergencia es correcto para el campo  $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{a}_x y^2 + \mathbf{a}_y (2xy + z^2) + \mathbf{a}_z 2yz$ , en un cubo de lado 1 centrado en el origen (igual que el cubo de la figura 5 (b) pero de lado 1).
7. Comprobar que el teorema de Stokes es válido para el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}_y (2xz + 3y^2) + \mathbf{a}_z 4yz^2$  y la trayectoria cuadrada  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ .
8. Probar que la divergencia de un rotacional siempre es cero
9. Probar que el rotacional de un gradiente siempre es cero.
10. Demostrar que un campo vectorial es conservativo si su rotacional es cero en todo el espacio.

11. Determinar cuáles de los siguientes campos vectoriales son conservativos.

a)  $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \mathbf{a}_r / r^2$ .

b)  $\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \mathbf{a}_\rho / \rho$ .

c)  $\mathbf{N}(x, y, z) = \mathbf{a}_z z / |z|$ .

d)  $\mathbf{A}(x, y, z) = x(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$ .

e)  $\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$ .

f)  $\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \mathbf{a}_\phi z \cos(\phi) + \mathbf{a}_z \rho \sin(\phi)$ .

g)  $\mathbf{H}(r, \theta, \phi) = \mathbf{a}_r r \cos(\theta) - \mathbf{a}_\theta \frac{r}{2} \sin(\theta) + \mathbf{a}_\phi$ .

12. Calcular el Laplaciano de las siguientes funciones.

a)  $g(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4$ .

b)  $n(x, y, z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z)$ .

c)  $f(x, y, z) = e^{-5x} \sin(4y) \cos(3z)$ .

d)  $\mathbf{N}(x, y, z) = \mathbf{a}_x x^2 + \mathbf{a}_y 3xz^2 - \mathbf{a}_z 2xz$ .