1 Valor de Shapley

Definición 1 *Un carrier para un juego v es una coalición T tal que para cualquier S, $v(S) = v(S \cap T)$.*

Ejemplo 1 *Sea v un juego de 3 jugadores, $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = 1$, y $v(S) = 0$ para las otras coaliciones. El carrier de v es $T = \{1,2\}$.*

Definición 2 *Dado un juego n–personal y cualquier permutación π del conjunto de jugadores N. Denotamos por πv al juego n–personal tal que para cualquier $S = \{i_1, ..., i_s\}$*

$$\pi v(\{\pi(i_1), ..., \pi(i_s)\}) = v(S).$$

Ejemplo 2 *Considere nuevamente el juego anterior, y $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1$ y $\pi(3) = 2$. Entonces $\pi v(\{1,2,3\}) = \pi v(\{3,1\}) = 1$ y $\pi v(S) = 0$ para las otras coaliciones.*

Axiomas (Shapley) Por el valor de un juego v al que denotamos por $\varphi(v) = (\varphi_1(v), ..., \varphi_n(v))$ satisface

S1. Sí S es un carrier, entonces

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(v) = v(S).$$

S2. Para cualquier permutación π, e $i \in N$

$$\varphi_{\pi(\{i\})}(\pi v) = \varphi_i(v).$$

S3. Si υ y v son dos juegos

$$\varphi_i(v + w) = \varphi_i(v) + \varphi_i(w).$$

Teorema 1 (Shapley) Existe una única función $\varphi : (N, v) \to R^N$ que satisface los Axiomas S1, S2 y S3. Esta función cumple que para cada $i \in N$

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right].$$

Curso :

Indices de Poder

Valor de Shapley

Indice de Banzhaf-Coleman

J. Oviedo

Universidad Nacional de San Luis

Demostración. Esta demostración se sigue de los resultados siguientes.

Lema 1 *Para cualquier coalición S, sea w_S el juego definido por*

$$w_S(T) = \begin{cases} 0 & si \quad S \nsubseteq T \\ 1 & si \quad S \subseteq T. \end{cases}$$

Entonces, si s es el número de jugadores de S,

$$\varphi_i\left(w_S\right) = \begin{cases} 1/s & si \quad i \in S \\ 0 & si \quad i \notin S. \end{cases}$$

Corolario 1 *Si $c > 0$, entonces*

$$\varphi_i\left(cw_S\right) = \begin{cases} c/s & si \quad i \in S \\ 0 & si \quad i \notin S. \end{cases}$$

Lema 2 *Si v es cualquier juego, entonces existen $2^n - 1$ números reales c_S para $S \subseteq N$ tal que*

$$v = \sum_{S \subseteq N} c_S w_S$$

donde w_S esta definido como en Lema anterior.

Demostración.

$$C_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T).$$

Demostración. Del Teorema. El Lema anterior dice que para cualquier juego v es combinación de los juegos w_S, además el valor de Shapley para estos juegos esta unívocamente definido.

$$\varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v)$$

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} c_S \varphi_i(w_S) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} c_S \frac{1}{s} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{1}{s} \left\{ \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T) \right\} =$$

$$\sum_{T \subseteq N} \left\{ \sum_{\substack{S \subseteq N \\ T \cup \{i\} \subseteq S}} (-1)^{s-t} \frac{1}{s} \right\} v(T)$$

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S\subseteq N \\ T\cup\{i\}\subseteq S}} (-1)^{s-t}\frac{1}{s}.$$

Sí $i \notin T'$ y $T = T' \cup \{i\}$, entonces $\gamma_i(T') = -\gamma_i(T)$

$$\varphi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} \gamma_i(T)v(T) = \sum_{\substack{T\subseteq N \\ i\in T}} \gamma_i(T)v(T) + \sum_{\substack{T'\subseteq N \\ i\notin T'}} \gamma_i(T')v(T') =$$

$$\sum_{\substack{T\subseteq N \\ i\in T}} \gamma_i(T)v(T) - \sum_{\substack{T'\subseteq N \\ T'\cup\{i\}=T}} \gamma_i(T)v(T') = \sum_{\substack{T\subseteq N \\ i\in T}} \gamma_i(T)[v(T) - v(T\backslash\{i\})$$

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S\subseteq N \\ T\cup\{i\}\subseteq S}} (-1)^{s-t}\frac{1}{s} = \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}\frac{1}{s} = \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}\int_0^1 x^{s-1}dx =$$

$$\int_0^1 \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}x^{s-1}dx = \int_0^1 x^{t-1}\sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}x^{s-t}dx =$$

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}.$$

Reemplazando obtenemos la fórmula del Valor de Shapley. Queda como ejercicio probar que la fórmula cumple los tres axiomas de Shapley.

Ejemplo 3 Calculemos el valor de Shapley para el juego dado por $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = 300$ y $v(\{i,j\}) = v(\{i\}) = 0$ para todo $i, j = 1, 2, 3$.

Calculemos $v(\ 1) - v(\{\emptyset\}) = 0$, $v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 300$, así formamos la tabla siguiente, en la primer columna ponemos todas las permutaciones (de los jugadores) y en las otras columnas el valor marginal del jugador i a la coalición que encuentra al entrar a ella. Note que el jugador 1 al entrar en la primer permutación no encuentra a nadie,de allí que $v(\{1\}) - v(\{\emptyset\}) = 0$, mientras que el jugador 2 encuentra al 1, es decir $v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 300$. Cuando el jugador 3 entra a la primera permutación encuentra al $1, 2$ por lo tanto $v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 300 - 300 = 0$.

	$v(S \cup \{i\}) - v(S)$		
Permutación	**1**	**2**	**3**
(1,2,3)	0	300	0
(1,3,2)	0	300	0
(2,1,3)	300	0	0
(2,3,1)	300	0	0
(3,1,2)	0	300	0
(3,2,1)	300	0	0
Valor de Shapley	900/6	900/6	0/6

En este ejemplo tenemos que el carrier es $S = \{1, 2\}$.

1.0.1 Extensiones Multilineales

Presentaremos otro método para calcular el Valor de Shapley.

Como v es una función del conjunto partes de N (2^N) en los reales podemos ver el conjunto partes de N como

$$2^N = \{0, 1\}^N$$

es decir que lo vemos como el conjunto de vértices del cubo n–dimensional. Es decir que podemos decir que v es una función real definida sobre los vértices del cubo n–dimensional. La función v puede ser extendida a todo el cubo. Nosotros extenderemos esta función para que resulte lineal en cada variable.

Definición 3 *Sea v un juego n–personal con carrier $N = \{1, ..., n\}$. La extensión multilineal (M:LE) de v es la función $f : [0, 1]^N \to \mathbf{R}$ definida por*

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) \right\} v(S).$$

Ejemplo Sea v el juego 3–personal de mayoría en la normalización (0,1). Su extensión multilineal es

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (1 - x_3) + x_1 x_3 (1 - x_2) + x_2 x_3 (1 - x_1) + x_1 x_2 x_3,$$

o

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2 x_1 x_2 x_3.$$

Justificación de la definición:

- La función es multilineal (lineal en cada variable acá lineal significa que cada variable está elevada a la potencia 1 o 0) es fácil de verificar.

- f es una extensión de v. Sea $S \subseteq N$, y α^S la S–esquina del cubo, es decir
$$\alpha^S = \begin{cases} 1 & si \quad i \in S \\ 0 & si \quad i \notin S \end{cases}$$
entonces
$$f(\alpha^S) = \sum_{T \subseteq N} \left\{ \prod_{i \in T} \alpha_i^S \prod_{i \notin T} (1 - \alpha_i^S) \right\} v(T) = v(S).$$

- Unicidad. f es la única función que tiene estas propiedades. Por ser f una función multilineal debe ser de la forma
$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{T \subseteq N} C_T \prod_{j \in T} x_j$$
pero para cada $S \subseteq N$ tenemos que:
$$f(\alpha^S) = \sum_{T \subseteq S} C_T = v(S)$$
este es un sistema lineal de 2^N ecuaciones con igual número de incógnitas. La matriz asociada es triangular inferior con 1 en la diagonal principal, por lo tanto es no–singular, es decir el sistema tiene solución única. También tenemos que la C definida en la demostración del Lema 2 es solución de este sistema.

Teorema 2 *Sean v, w juegos con conjuntos de jugadores M, N disjuntos y f, g sus extensiones multilineales. Entonces para cada α, β el juego $\alpha v + \beta w$ tiene como extensión multilineal $\alpha f + \beta g$.*

Teorema 3 *Sean v, w juegos con conjuntos de jugadores M, N disjuntos y $v \oplus w$ ($v \oplus w(S \cup T) = v(S) + w(T)$) la suma de von Neuman Morgesntern. Si f, g son las extensiones multilineales de v, w respectivamente. Entonces la extensión multilineal de $v \oplus w$ es $f \oplus g$ definida por:*
$$f \oplus g(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) + g(y_1, ..., y_m).$$

Teorema 4 *Sea v un juego a suma constante y f su extensión multilineal. Entonces para cualquier x*

$$f(1-x_1,...,1-x_n) = v(N) - f(x_1,...,x_n).$$

Sea

$$f_i(\mathbf{x}) = \partial f(\mathbf{x})/\partial x_i = \sum_{\substack{T\subseteq N\\ i\in T}} \prod_{\substack{j\in T\\ j\neq i}} x_j \prod_{j\notin T}(1-x_j)v(T) - \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} \prod_{j\in S} x_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i}}(1-x_j)v(S)$$

haciendo $T = S\cup\{i\}$ la parcial se reduce a:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} \prod_{j\in S} x_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i}}(1-x_j)[v(S\cup\{i\}) - v(S)] \tag{1}$$

en particular para $\mathbf{x} = (t,...,t)$

$$f_i(t,...,t) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} t^s(1-t)^{n-s-1}[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$$

integrando

$$\int f_i(t,...,t)dt = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} \left\{\int t^s(1-t)^{n-s-1}dt\right\}[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$$

o

$$\int_0^1 f_i(t,...,t)dt = \varphi_i(v).$$

Ejemplo Sea v el juego 3–personal de mayoría en la normalización (0,1). Su extensión multilineal es

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1x_2x_3$$

y la derivada parciales son:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3 - 2x_2x_3$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 - 2x_1x_3$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - 2x_1x_2$$

y

$$f_1(t,t,t) = 2t - 2t^2.$$

El valor de Shapley es $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v))$ donde

$$\varphi_1(v) = \int_0^1 f_1(t,t,t)dt = \int_0^1 \{2t - 2t^2\}dt = [t^2 - \frac{2}{3}t^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

similarmente $\varphi_2(v) = \varphi_3(v) = 1/3$.

Algunas ventajas de la aproximación multilineal es que:

- Sean w_j, $j = 1, ..., n$ juegos normalizados (0,1) con carrier disjuntos $M_1, ..., M_n$ y v el juego nonegativo con carrier $N = \{1, ..., n\}$. Sea

$$u(S) = v(\{j : w_j(S \cap M_j) = 1\})$$

para $S \subseteq \cup_j M_j$ esto define el juego composición $u = v[w_1, ..., w_n]$.

- Considere

$$u(S) = \sum_{T \subseteq N} \prod_{j \in T} w_j(S) \prod_{j \notin T} [1 - w_j(S)] v(T) = f(w_1(S_1), ..., w_n(S_n)) \quad (2)$$

donde $S_j = S \cap M_j$ y f es la extensión multilineal de v. Como w_j son juegos simples tenemos que

$$(w_1(S_1), ..., w_n(S_n)) = \alpha^T,$$

donde $T \subseteq N$ y está dado por

$$T = \{j : w_j(S_j) = 1\}$$

$$u(S) = f(\alpha^T) = v(T)$$

Sea g_j, $j = 1, ..., n$ la extensión multilineal de los juegos normalizados (0,1) w_j. Sea

$$g = g_1 \times ... \times g_n : [0,1]^{M_1} \times ... \times [0,1]^{M_n} \to [0,1]^{\cup_j M_j = M^*}$$

$$g(\mathbf{x}) = (g_1(x^1), ..., g_n(x^n))$$

donde x^j es la restricción del vector $\mathbf{x}$ a los índices $i \in M_j$. Sea f la extensión multilineal de v, el dominio es $[0,1]^N$. Consideremos la composición definido sobre el cubo $[0,1]^{M^*}$

$$h(\mathbf{x}) = f(g_1(x^1), ..., g_n(x^n))$$

h es una función multilineal de la variables x_i, $i \in M^*$. Sea $i \in M_j$ como los M_k son disjuntos tenemos que:

$$h_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(g_1(x^1), ..., g_n(x^n))}{\partial y_j} \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f_j(g(\mathbf{x}))(g_j)_i(x^j)$$

$h_i(\mathbf{x})$ no depende de x_i. Por lo tanto h es lineal en x_i. Es decir h es multilineal.

Teorema 5 *Sea v un juego n–personal nonegativo, w_i, $i = 1, ..., n$ juegos que cumplen que:*

$$\begin{array}{rcll} w_j(S) & \geq & 0 & \textit{para todo } S \subseteq M_j \\ w_j(M_j) & = & 1 & \textit{para todo } j \end{array}$$

y sea $u = v[w_1, ..., w_n]$. Sean $f, g_1, ..., g_n$ las respectivas extensiones multilineales de v y w_i, sea $h = f \circ g$. Entonces h es la extensión multilineal de u.

- Este teorema dice que la composición de juegos se corresponde con la composición de la extensión multilineal.

- Uno espera que poder componer el valor de Shapley, es decir espera tener una fórmula

  $$\varphi_i(u) = \varphi_i(w_j)\varphi_j(v)$$

  En general esta igualdad no es verdadera.

  $$\varphi_i(u) = \int_0^1 f_j(y(t))g_{ji}(t, ..., t)dt \tag{3}$$

  donde $y_k(t) = g_k(t, ..., t)$

  $$\varphi_i(w_j) = \int_0^1 g_{ji}(t, ..., t)dt$$

$$\varphi_i(v) = \int_0^1 f_j(t, ..., t)dt.$$

La fórmula (3) permite calcular el valor para los juegos compuestos

$$\sum_{i \in M_j} \varphi_i(u) = \int_0^1 f_j(y(t)) \sum_{i \in M_j} g_{ji}(t, ..., t)dt$$

$$\sum_{i \in M_j} \varphi_i(u) = \int_0^1 f_j(y(t)) \frac{dy_j(t)}{dt} dt.$$

Ejemplo 4 *Consideremos el Concejo de Seguridad de las Naciones Unidas. Puede ser representado como un juego $u = v[w_1, w_2]$ donde w_1 es un juego de 5 personas en la cual la única coalición ganadora es la total $v(\{1, ..., 5\}) = 1$, $v(S) = 0$ para cualquier subconjunto de $\{1, ..., 5\}$. w_2 es un juego de 10 jugadores donde cualquier coalición de más de cuatro jugadores es una coalición ganadora. v es un juego de dos–personas simple en la cual la coalición de dos jugadores es ganadora. Las extensiones multilineales de w_1, w_2, v :*

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \qquad y_1(t) = y^5$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \sum_{s=4}^{10} \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i)$$

$$g_{2i}(t) = \sum_{S \subseteq M_2 - \{i\}} t^s (1-t)^{9-s} = \binom{9}{3} t^3 (1-t)^6 = 84 t^3 (1-t)^6$$

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2$$

El valor de Shapley para $i \in M_2$ (miembros no–permanentes)

$$\varphi_i(u) = \int_0^1 f_2(y(t)) g_{2i}(t, ..., t)dt = \int_0^1 84 t^5 t^3 (1-t)^6 dt = 84 \frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{2145}$$

$$\varphi_i(u) = \begin{cases} 421/2145 = 0,1963 & \textit{si } i \textit{ es un miembro permanente} \\ 4/2145 = 0,00186 & \textit{si } i \textit{ no es un miembro permanente} \end{cases}$$

1.0.2 Indice de Poder de Banzhaf–Coleman

Sea v un juego simple normalizado (0,1), un "swing" o impulso para jugador i es un conjunto $S \subseteq N$ tal que S es ganadora y $S\backslash\{i\}$ es perdedora.

Sea θ_i el número de impulsos para jugador i entonces

$$\beta_i(v) = \theta_i / \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$

Este es el índice normalizado de Banzhaf–Coleman.

Ejemplo 5 *Considere un juego de tres–personas donde las únicas coaliciones ganadoras son {1,2}, {1,3}, {1,2,3}.* $\theta_1 = 3$, $\theta_2 = \theta_3 = 1$

$$\beta = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \text{ y } \varphi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$$

En general podemos definir θ_i como:

$$\theta_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

$$\psi_i(v) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \theta_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

$$\psi_i(v) = f_i(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$$

Teorema 6 *Sí* u, v *son juegos n–personales y* α, β *escalares, entonces*

$$\psi(\alpha v + \beta w) = \alpha \psi(v) + \beta \psi(w)$$

Teorema 7 *Sí* u, v *son juegos con conjunto disjuntos de jugadores* M *y* N*, entonces*

$$\psi_i(v \oplus w) = \psi_i(v) \qquad i \in M$$

$$\psi_j(v \oplus w) = \psi_j(w) \qquad j \in M.$$

Teorema 8 *Si i es un dummy (i no pertenece al carrier del juego), entonces $\psi_i(v) = 0$.*

Teorema 9 *Sean $w_1, ..., w_n$ juegos con conjuntos de jugadores disjuntos M_j $j = 1, ..., n$, que cumplen que $w_j \geq 0$, $w_j(M_j) = 1$, para cada j; sea v un juego no–negativo con conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ y $u = v[w_1, ..., w_n]$. Entonces para cada $j \in N$, existe $\lambda_j \geq 0$ tal que si $i \in M_j$ tal que*

$$\psi_i(u) = \lambda_j \psi_i(w_j)$$

Se prueba usando la extensión multilineal $f, g_1, ..., g_n$ de los juegos $v, w_1, ..., w_n$ que:

$$\lambda_j = f_j \left(y(\frac{1}{2}) \right).$$

Corolario 2 *Sean u, v, w_j como en el Teorema anterior, supongamos además que los juegos w_j son a suma constantes. Entonces si $i \in M_j$*

$$\psi_i(u) = \psi_j(v)\psi_i(w_j)$$

Ejemplo 6 *Calculemos el índice de poder de Banzhaf–Coleman del Concejo de Seguridad.*

$$f_1(y) = y_2, \qquad f_2(y) = y_1$$

$$y_1 \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Sí $i \in M_1$

$$g_{1i}(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}.$$

$$y_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{53}{64}$$

Sí $i \in M_2$

$$g_{2i}(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}) = \frac{21}{128}$$

$$\psi_i(u) = \begin{cases} \frac{53}{64}\frac{1}{16} = \frac{53}{1024} & \textit{si } i \textit{ es un miembro permanente} \\ \frac{21}{128}\frac{1}{32} = \frac{21}{4096} & \textit{si } i \textit{ no es un miembro permanente.} \end{cases}$$