Curso :

Juegos Cooperativos

Core

J. Oviedo

Universidad Nacional de San Luis

1. Juegos Cooperativos

En estos juegos se permite la comunicación entre los jugadores, también pueden firmar contratos de cooperación. Esto es la cooperación.

Aparece una nueva idea: Coalición. Una coalición esta formada por un subconjunto de jugadores que están dispuestos a colaborar entre ellos.

Sí un conjunto $S \subseteq N$ de jugadores forman una coalición la utilidad total que ellos obtienen se denota por $v(S)$. Dado un juego $n-$`personal en forma normal`, la utilidad $v(S)$ se puede calcular como el valor maximin (para S) del juego bipersonal jugado entre S y $N - S$. De esta definición se sigue que:

$$v(\emptyset) = 0$$

y que

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \qquad \text{si } S \cap T = \emptyset.$$

Esta utilidad se puede dividir entre ellos de cualquier forma entre los miembros de la coalición.

Nosotros no estamos interesados en calcular la función característica de un juego n–personal en forma normal, sino dada el juego y su función característica estudiar propiedades.

Definición 1 *Un Juego de $n-$personas en forma de función característica es un par (N, v), donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbf{R}$ tal que:*

$$v(\emptyset) = 0$$

y que

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \qquad \text{si } S \cap T = \emptyset.$$

Definición 2 *Un Juego (N, v) se dice a suma constante si para todo S*

$$v(S) + v(N - S) = v(N).$$

Definición 3 *Una imputación o una distribución de pago para el juego (N, v) es un vector $x = (x_1, ..., x_n)$ que satisface:*

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$
2. $x_i \geq v\,(i)$ *para cada* $i \in N$.
   El conjunto de todas las imputaciones para este juego se denota por $E(v)$.

Definición 4 *Un juego es esencial si*

$$v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$$

en otro caso decimos que es inesencial.

1.1. Dominación, equivalencia estratégica y normalización.

Definición 5 *Sean x, y dos imputaciones del juego (N, v) y sea S una coalición. Decimos que x domina a y vía S ($x \succ_S y$) si:*

1. $x_i > y_i$ *para todo* $i \in S$
2. $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$

Definición 6 *Sean x, y dos imputaciones del juego (N, v). Decimos que x domina a y si existe una coalición S tal que $x \succ_S y$.*

Definición 7 *Dos juegos n–personales (N, u) y (N, v) se dicen isomorfos si existe una función inyectiva f que mapea $E(u)$ sobre $E(v)$ tal que para cada $x, y \in E(u)$, y S*

$$x \succ_S y \Leftrightarrow f(x) \succ_S f(y).$$

Definición 8 *Dos juegos n–personales (N, u) y (N, v) se dicen S–equivalentes si existe un número $r > 0$ y n constantes reales $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tal que para todo S*

$$v(S) = ru(s) + \sum_{i \in S} \alpha_i.$$

Teorema 1 *Si u, v son S–equivalentes entonces son isomorfos.*

Definición 9 *Un juego v se dice normalizado $(0, 1)$ si:*

1. $v(i) = 0$ *para todo* $i \in N$
2. $v(N) = 1.$

Teorema 2 *Si u es un juego esencial, este es equivalente a un único juego normalizado $(0, 1)$.*

Ejemplo 1 Sea u un juego de 3–personas definido por: $u(\emptyset) = 0$, $u(i) = i+1$, $i = 1, 2, 3$; $u(i, j) = i+j+3$, para cada $i \neq j$ y $u(1, 2, 3) = 10$. Las constantes r, α_i para el juego $(0, 1)$ normalizado deben cumplir:

$$\begin{array}{lcl} 2r + \alpha_1 & = & 0 \\ 3r + \alpha_2 & = & 0 \\ 4r + \alpha_3 & = & 0 \\ 10r + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 1. \end{array}$$

Definición 10 *Un juego v se dice simétrico si $v(S)$ depende solo del número de elementos de S.*

Definición 11 *Un juego v normalizado $(0,1)$ se dice simple si para cada $S \subseteq N$ se cumple que: $v(S) = 0$ o $v(S) = 1$. Un juego es simple si su normalización $(0,1)$ es simple.*

Definición 12 *Sea $(p_1, ..., p_n)$un vector no–negativo y q satisface*

$$0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Entonces el juego de mayoría con peso $[q; p_1, ..., p_n]$ es el juego simple v definido por

$$v(S) = \begin{cases} 0 & si \quad \sum_{i \in S} p_i < q \\ \\ 1 & si \quad \sum_{i \in S} p_i \geq q. \end{cases}$$

1.2. El Core y conjuntos estables

Definición 13 *El core de un juego v es el conjunto de todas las imputaciones no–dominadas. Se denota por $C(v)$.*

Teorema 3 *El core de un juego v es el conjunto de todos los n–vectores x tal que:*

1. $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ *para cada* $S \subseteq N$
2. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Teorema 4 *Si v es un juego esencial a suma constante entonces $C(v) = \emptyset$.*

Ejemplo 2 Jugador 1 (vendedor) tiene un caballo inútil para él, a menos que lo venda. Jugadores 2 y 3 (compradores) tasan el caballo en 90 y 100 pesos, respectivamente. Si 1 vende el caballo a 2 a un precio de x, éste será su beneficio, mientras que para el jugador 2 será de $90 - x$. El beneficio total de la coalición {1,2} será de \$90. Es decir $v(\{1,2\}) = 90$, $v\{1,3\} = 100$, $v(i) = v(\{2,3\}) = 0$ y $v([1,2,3\}) = 100$. El core es

$$C(v) = [(t, 0, 100 - t) : 90 \leq t \leq 100\}.$$

Ejemplo 3 (Juego de Asignación) Sea $N = M \cup M'$, donde M y M' son conjuntos disjuntos, $M = \{1, ..., m\}$ y $M' = \{m+1, m+2, ..., 2m\}$. Jugador

$i \in M$ (el $i-$ésimo vendedor) tiene una casa la cual la valúa a a_i. Jugadores $m+j$, $j=1,...,m$ desean comprar una casa, y valúan con $b_{i,j}$ la casa del i–ésimo vendedor. Así la coalición entre un vendedor y un comprador es

$$v(\{i, m+j\}) = \begin{cases} b_{i,j} - a_i & si \quad b_{i,j} \geq a_i \\ \\ 0 & si \quad b_{i,j} \leq a_i \end{cases}$$

Notar que $v(S) = 0$ para cualquier coalición que contenga sólo a vendedores o sólo a compradores. $v(S)$ es igual al máximo beneficio total generado por los vendedores y compradores de la colición S. Es decir que

$$v(S) = \max \sum_{i \in S \cap M} c_{i,j(i)}$$

Para la gran coalición tenemos

$$v(N) = \max \sum_{i=1}^{m} c_{i,j(i)}.$$

Esto se puede escribir como un programa lineal

$$\begin{array}{ll} & Max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} q_{i,j} c_{i,j} \\ s.a. & \\ & \sum_{i=1}^{m} q_{i,j} = 1 \text{ para todo } j = 1,...,m \\ & \sum_{j=1}^{m} q_{i,j} = 1 \text{ para todo } i = 1,...,m \\ & q_{i,j} \geq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & Min \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{m} z_j \\ s.a. & \\ & y_i + z_j \geq c_{i,j} \qquad i,j = 1,...,m. \end{array}$$

Notar que

- Las variables duales no tienen porque ser no–negativas
- La solución del problema dual no es única. Si (y^*, z^*) es solución del dual entonces (y', z') es solución donde $y' = y^* - t$ y $z' = z^* + t$ para todo t.
- Construyamos una solución no–negativa. Sea $t = \min_i y_i^*$, con esto construimos $y' \geq 0$ y $z' \geq 0$.
- Por dualidad tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} y_i' + \sum_{j=1}^{m} z_j' = v(N)$$

- Como
$$v(S) = c_{i_1,j_1} + ... + c_{i_q,j_q}$$
entonces $(y', z') \in C(v)$.

Ejemplo 4 (Juegos Simples) Sea v un juego simple en la normalización $(0, 1)$. Decimos que el jugador i tiene poder de veto (o es un jugador veto) si

$$v(N \backslash \{i\}) = 0.$$

Si el juego no tiene jugadores vetos entonces el $C(v) = \emptyset$. Inversamente si el juego tiene al menos un jugador veto entonces $C(v) \neq \emptyset$.

1.3. Colecciones balanceadas

Queremos caracterizar juegos que tengan Core no vacíos.

Notemos que $C(v) \neq \emptyset$ si y sólo si el programa lineal

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i = z$$

sujeto a

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \text{para cada } S \subseteq N$$

tiene un mínimo $z^* \leq v(N)$. En este caso el vector x^* que está en el argumin está en el Core.

El dual de este programa es

$$\max \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) = q \tag{1}$$

sujeto a

$$\sum_{\substack{S \\ i \in S \subseteq N}} y_S = 1 \qquad \text{para todo } i \in N \tag{2}$$

$$y_S \geq 0 \qquad \text{para todo } S \subseteq N \tag{3}$$

Los programas duales anteriores salen como consecuencia de

$$\begin{array}{llll} & \max Cy & & \min xb \\ s.a. & & s.a & \\ & Ay = b & & xA \geq C \\ & y \geq 0 & & x \text{ sin restricción} \end{array}$$

Teorema 5 *Una condición necesaria y suficiente para que el juego v tenga core no vacío es que para cada vector no–negativo $(y_S)_{S\subseteq N}$ satisfaciendo (2) tengamos que*

$$\sum_{S\subseteq N} y_S v(S) \leq v(N).$$

Definición 14 *Sea $\mathcal{C} = \{S_1, ..., S_m\}$ una colección de subconjuntos no vacíos de $N = \{1, ..., n\}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es N–balanceada (o balanceada) si existen números positivos $y_1, ..., y_n$ tal que para cada $i \in N$*

$$\sum_{\substack{j\\ i\in S_j}} y_j = 1.$$

$y = (y_1, ..., y_n)$ es el vector balance para $\mathcal{C}$, y los y_j son los coeficientes balances.

Ejemplo 5 Cualquier partición de N es balanceada Todos los coeficientes balances son iguales a 1.
Ejemplo 6 Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ es balanceada, $y = (1/3, 1/3, 1/3, 2/3)$ es el vector balance.

Teorema 6 *La unión de conjuntos balanceados es balanceado.*

Lema 1 *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos colecciones balanceadas tal que $\mathcal{C} \subsetneqq \mathcal{D}$, entonces existe una colección balanceada $\mathcal{B} \neq \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{D}$. Más aún el vector balance para $\mathcal{D}$ no es único.*

Teorema 7 *Cualquier colección balanceada es la unión de colecciones balanceadas minimales.*

Demostración. Por inducción sobre el número de conjuntos de la colección. ■

Teorema 8 *Una colección balanceada tiene un único vector balance si y sólo si es minimal.*

Teorema 9 *Los puntos extremos de (1)–(3) son los vectores balances de las colecciones balanceadas minimales.*

Corolario 1 *Una colección N–balanceada minimal contiene a lo más n conjuntos.*

Teorema 10 *Una condición necesaria y suficiente para que el juego n–personal v tenga core no vacío es que, para cada colección N–balanceada minimal $\mathcal{C} = \{S_1, ..., S_m\}$ con vector de balance $y = (y_1, ..., y_m)$,*

$$\sum_{j=1}^{m} y_j v(S_j) \leq v(N).$$