Curso :

Modelos de Asignación

A. Neme y J. Oviedo

Universidad Nacional de San Luis

1. Introducción

1.1. Aplicaciones Económicas y ejemplos.

A. Roth [1984] hizo la siguiente descripción de un problema de médicos residentes.

En Estados Unidos las residencia médicas fueron introducidas al principio de siglo como un forma opcional para hacer posgrado en medicina. Los estudiantes para hacer un internado o residencia se ofrecían a una clínica médica en una especialización concertada, y los hospitales que ofrecían posiciones obtenían mano de obra relativamente barata. El número de posiciones ofrecida al principio, fue mayor que el número de graduados que aplicaban, por lo tanto, comenzó una competencia entre los hospitales por los internos.

La competencia se manifestó de la siguiente forma: algunos hospitales empezaron a adelantar la fecha en la cual ellos podían finalizar el acuerdo con los internos, así podían contratar residentes un poco antes que sus principales competidores. Como resultado la fecha en la cual mucho de los contratos de internos yá se habían firmado, comenzó a decrecer, llegando hasta el final del último año de la carrera. Así surgió el primer problema: los hospitales habían firmado contrato con internos sin conocer su notas finales. Por otro lado, los estudiantes y universidades bajaron el nivel en el proceso de búsqueda de un puesto deseable. Sin embargo la fecha de contrato continuó adelantándose hasta 1944, en la cual los contratos se hacían al comienzo del cuarto año. Es decir la fecha de contrato había avanzado a los dos últimos años, antes de que la residencia pudiese comenzar. La Asociación de Colegio Médico Americana (AAMC) adoptó (para los residentes que comenzarían en 1946) la resolución siguiente: no enviarían cartas de referencias (las universidades) hasta que los estudiantes no finalizara el cuarto año.

Esto pareció ser la solución del problema que se intentaba resolver. Los contratos para 1946 muchos fueron hechos en el verano de 1945, y en años subsiguientes la fecha en la cual la información fue liberada por las universidades fue movida hasta el final del último año. Sin embargo un nuevo problema apareció y se manifestó en si mismo como el período de espera entre el tiempo que se le hacía la oferta al residente y el tiempo que el hospital le daba para que aceptara la oferta.

Básicamente, el problema fue que a los estudiantes a quienes les era ofrecido un internado (por ejemplo, recibía una oferta de un hospital que estaba en su tercera elección) y estaban informados que figuraban en la lista de espera de un hospital que era una mejor opción que la anterior (por ejemplo, su segunda opción), podían inclinarse a esperar tanto como fuese posible antes de aceptar la posición ofrecida (su tercera opción) con la esperanza de tener eventualmente un ofrecimiento mejor (i.e su segunda opción). Los hospitales, cuyos candidatos esperaban hasta el último momento para rechazarlos, podían perder su segunda opción (otro residente) ya que este candidato podría haber aceptado alguna posición antes de que este le hiciese una oferta. Así, los estudiantes estaban presionados por los hospitales.

En repuesta a la presión originada desde los hospitales, fueron hechas una serie de ajustes entre los años 1945–51.

En 1945, se resolvió que los hospitales debían darle (a los estudiantes) 10 días para dar una repuesta a la oferta, es decir, que en este período podía aceptar o rechazarla. En 1946, este período se acortó a 8 días. En 1949 la AAMC propuso que las ofertas debían ser hechas por telegrama a las 12:01 AM (el día 15 de noviembre) y los estudiantes tenían hasta las 12:00 PM del mismo día para dar una repuesta. Aún, estas doce horas de espera fue rechazada por la Asociación de Hospitales Americana como muy largo. Una resolución conjunta resolvió acordar que *ningún tiempo de espera después de las 12:01 AM era obligatorio* y específicamente acordó que los telegramas debían ser enviados a las 12:01 AM. En 1950 la resolución nuevamente incluía 12 horas para considerar la oferta, además que *hospitales no podían hacer ofertas y estudiantes aceptarlas con llamadas telefónicas* hasta el fin de este período (note que la prohibición del teléfono fue en doble sentido, ya que de esta forma se pretendía evitar que desde los hospitales presionaran a los estudiantes para una decisión inmediata y para que los estudiantes no buscaran convertir una alternativa en una oferta).

Ambas partes reconocieron el serio problema que daba la última etapa del proceso de asignación o macheo y que no se resolvería con acortar el tiempo de la última etapa. Para evitar este problema y el costo que ello imponía se acordó en buscar un procedimiento centralizado de asignación o macheo. Este procedimiento decía que estudiantes y hospitales debían continuar haciendo contacto e intercambiando información como antes. En base a esto, los estudiantes debían hacer un ranking con un orden de preferencia de hospitales a los cuales aplicarían. Los hospitales similarmente ordenaban sus candidatos. Ambas partes enviaban estos ranking a una oficina central, la cual usaba esta información para hacer una asignación o macheo entre estudiantes y hospitales e informaba a las partes del resultado. Un algoritmo fue propuesto para producir un macheo a partir de los rankings submitidos.

Fue acordado tratar el procedimiento propuesto (es decir el algoritmo) para el mercado 1950–1 como prueba. Para esto, se invitó a los participantes a enviar el ranking "como si " ellos lo quisieran usar para determinar el macheo o asignación final. La oficina central enviaría el resultado a las partes, para que evaluara este resultado con respecto a las contrataciones que se habían llevado a cabo. Sobre esta base, las asociaciones mdicas acordaron adoptar el algoritmo para el mercado 1951–2. El procedimiento fue empleado sobre una base voluntaria: estudiantes y hospitales ambos eran libres de participar en el proceso o hacer su propias propuestas.

Antes que el procedimiento fuera implementado algunos representantes de estudiantes presentaron algunas objeciones en contra el algoritmo. Ellos observaron que un estudiante que enviaba un ranking de hospitales correspondiente a su verdadera preferencia podía recibir una asignación (o macheo) menos preferible, a que si enviaba un ranking diferente. En repuesta a estas objeciones un nuevo algoritmo fue hecho para el mercado 51–2. Este algoritmo que aún se sigue usando se lo denominó NIMP (National Intern Matching Program).

1.2. Definiciones básicas del modelo.

D. Gale y L. Shapley [1962] formularon el siguiente modelo al que llamaron modelo de asignación o matrimonio. Curiosamente, ellos no conocan el algoritmo NIMP de 1951. Denotamos por $M = \{m_1, ..., m_n\}$ y $W = \{w_1, ..., w_p\}$ a dos conjuntos finitos y disjuntos de agentes (hombres y mujeres) en el modelo de asignación. Cada hombre tiene un orden de preferencia sobre las mujeres y viceversa. Así que, cuando decimos que un individuo i *prefiere* la alternativa a a b significa que, si el individuo i tuviese que elegir entre las dos alternativas, él elegiría a, es decir que él no elegiría b sí a estuviese disponible, lo denotaremos por $aP(i)b$. De igual forma decimos que un individuo es *indiferente* entre las alternativas a y b si él o ella elegiría cualquiera de las dos alternativas. Supondremos que las preferencias de cada individuo (hombre o mujer) son: *transitivas, estrictas* y *completas* (es decir, $aP(i)b$ o $bP(i)a$ para cualquier par de alternativas a, b). Denotaremos por $P(m)$ una lista de preferencias para el hombre m, sobre el conjunto $W \cup \{m\}$. Por ejemplo, una preferencia para el hombre m puede tener la siguiente forma

$$P(m) = w_1, w_3, w_2, m, w_4, ..., w_p \tag{1}$$

esto indica que su primera elección es la mujer w_1 luego la mujer w_3 y así sucesivamente. Notemos que su cuarta elección es $m,$ es decir, permanecer soltero. En lugar de usar (1) como la lista de preferencia del hombre m denotaremos por

$$P(m) = w_1, w_3, w_2$$

es decir, solo notaremos en la lista de preferencias de m a las mujeres que son más preferidas que su propia elección, es decir, quedarse soltero.

Similarmente, cada mujer $w \in W$ tiene una lista ordenada de preferencias $P(w)$, sobre el conjunto $M \cup \{w\}$. Denotaremos por $\mathbf{P}$ al conjunto de lista de preferencias para todos los individuos o agentes es decir que

$$\mathbf{P} = \{P(m_1), P(m_2), ..., P(m_n), P(w_1), ..., P(w_p)\}$$

Denotaremos por $(M, W, \mathbf{P})$ al *modelo de asignación*. Una mujer w es *aceptable* para el hombre m si $wP(m)m$ es decir, que la mujer w es preferida para el hombre m que quedarse soltero. Análogamente, el hombre m es *aceptable* para la mujer w si $mP(w)w$.

Una solución al modelo de asignación, es encontrar un conjunto de asignaciones entre el conjunto de hombres y mujeres.

Definición 1 *Una asignación o matching μ es una correspondencia uno a uno del conjunto $M \cup W$ sobre sí mismo, que cumple:*

1. $\mu^2(x) = x$, para todo $x \in M \cup W$.
2. si $\mu(m) \neq m$ entonces $\mu(m) \in W$.
3. si $\mu(w) \neq w$ entonces $\mu(w) \in M$.

Diremos que $\mu(x)$ es el compañero de x, o que $\mu(x)$ esta casado con x.

La condición 2,3 dice que si un agente no esta single o soltero en el matching μ debe estar casado con un agente del conjunto opuesto. La condición 1, $\mu^2(x) = x$ significa que si un hombre m está casado con la mujer w (es decir si $\mu(m) = w$) entonces la mujer w está casada con el hombre m (es decir, $\mu(w) = \mu(\mu(m)) = m$).

Representaremos un matching por un conjunto de pares, por ejemplo

$$\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & m_5 \\ m_2 & m_4 & m_1 & m_3 & m_5 \end{pmatrix}$$

esta asignación dice que el compañero de m_1 es w_3, el hombre m_5 esta soltero, etc.

Dados dos matching μ, ν cada agente puede comparar los compañeros que le asignan cada matching según su orden de preferencia. Digamos un hombre m prefiere la asignación μ a ν si y sólo sí $\mu(m)P(m)\nu(m)$.

1.3. Asignaciones o matching estables

Estamos interesados en considerar matching que se puedan llevar a cabo, es decir, que ningún agente o par de agente pueda romper o bloquear esta asignación. Enumeraremos algunas reglas que juegan un rol crítico. La primera es que ningún agente pude ser obligado a formar pareja con un agente del otro conjunto si este no es aceptable por el primero.Por ejemplo, supongamos que $\mu(w) = m$ y m no es aceptable para w $(wP(w)\mu(w) = m)$ entonces w bloquea a la asignación μ.

Definición 2 *Una asignación o matching μ es individualmente racional si para cada agente su compañero es aceptable. Es decir que un matching es individualmente racional si no esta bloqueado por ningún agente.*

La segunda regla es: Consideremos un matching μ tal que existe un hombre m y una mujer w que cumple $\mu(m) \neq w$ (es decir, en el matching μ no están casados) pero que cada uno de ellos se prefieren (según sus respectivos órdenes de preferencias) al compañero que le asigna μ, (es decir que $wP(m)\mu(m)$ y $mP(w)\mu(w)$). En este caso diremos que el par de agentes (m, w) bloquea al matching μ.

Definición 3 *Un matching μ es estable si no es bloqueado por ningún agente o ningún par de agentes.*

Estos son los criterios para excluir matching. Es decir queremos considerar matching estables ya que los matching inestables no se llevarán a cabo ya que pueden ser bloqueados por un agente o un par de agentes.

Ejemplo 1 *Consideremos dos hombres y tres mujeres con el siguiente orden de preferencias.*

$P(m_1) = w_2, w_1, w_3$ $\qquad\qquad$ $P(w_1) = m_1, m_3, m_2$
$P(m_2) = w_1, w_3, w_2$ $\qquad\qquad$ $P(w_2) = m_3, m_1, m_2$
$P(m_3) = w_{21}, w_2, w_3$ $\qquad\qquad$ $P(w_3) = m_1, m_3, m_2$

Todas los matching son individualmente racionales (ya que todos los pares (m, w) son mutuamente aceptables). Los matching μ μ' definidas por

$$\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \qquad \mu' = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}.$$

(m_1, w_2) bloquea a μ, pues $m_1 P(w_2) \mu(w_2)$ ya que $\mu(w_2) = m_2$ y $w_2 P(m_1) \mu(m_1)$ ya que $\mu(m_1) = w_1$. En cambio μ' es estable.

La descripción siguiente nos dá un método para construir una asignación estable. Este método se conoce como el *algoritmo de aceptación diferida* con los hombres proponiendo

Primer etapa. Cada hombre le propone un compromiso a la primera mujer en su lista de preferencias. Las mujeres (que han recibido al menos una propuesta) rechazan a los hombres que son inaceptables para ella o en el caso de tener más de un candidato aceptable, rechaza a todos, salvo al hombre más preferido de los que le propusieron. Los hombres que no han sido rechazados en esta etapa quedan comprometidos con la mujer que los aceptó.

Etapa siguiente. Los hombres que han sido rechazados en una etapa previa le proponen un compromiso a la próxima mujer en su lista de preferencias (es decir, a la mujer más preferida de entre aquellas que aún no lo han rechazado), siempre que tenga alguna mujer aceptable. Si en alguna etapa del procedimiento un hombre que ya ha hecho su propuestas y ha sido rechazado por todas las mujeres aceptable para él no podrá hacer ninguna propuesta más y quedará soltero. Las mujeres (se comportan en forma similar a la primera etapa) que tienen más de una propuesta en esta etapa rechazan a los inaceptables, y de aquellos que son aceptables elijen el mejor de los candidatos del conjunto de los aceptables y del que (si existe) pudiese estar comprometida en alguna etapa anterior.

Ultima etapa. El algoritmo para cuando ningún hombre es rechazado. En esta etapa cada hombre esta comprometido con alguna mujer o ha sido rechazado por todas las mujeres aceptables de su lista de preferencias.

El algoritmo debe parar en alguna etapa porque solo hay un número finito de hombre y mujeres y ningún hombre le propone a una mujer más de una vez.

Los compromisos que dá este algoritmo es un matching, ya que cada hombre queda comprometido con a lo más una mujer. Lo mismo ocurre para las mujeres.

El matching o matrimonio se lleva a cabo entre los hombres y mujeres que están comprometidos y los agentes (hombres o mujeres) que no tienen compromiso quedan singles o solteros.

El matching que forma este algoritmo es individualmente racional ya que ningún hombre o mujer se compromete con un compañero inaceptable.

Veamos que el matching es estable. Supongamos que no, es decir existen (m, w) que bloquean a μ, esto dice que $mP(w)\mu(w)$ y $wP(m)\mu(m)$. Notemos que m es aceptable para w e inversamente. Como la compañera del hombre m es $\mu(m)$ y $wP(m)\mu(m)$ quiere decir que en alguna etapa del algoritmo, el hombre m le hizo una proposición a la mujer w y como $\mu(w) \neq m$ quiere decir que w lo rechazó porque tuvo una oferta mejor. Por lo tanto $\mu(w)P(w)m$, esto contradice que $mP(w)\mu(w)$. Este algoritmo muestra que existe matching estables. Este matching se lo denota por μ_M.

Teorema 1 *(Gale y Shapley) En el modelo de asignación existe un matching estable.*

Ejemplo 2 *Un ejemplo del algoritmo de aceptación diferida, donde los hombres comienzan proponiendo. Hay 5 hombres y cuatro mujeres. Las preferencias son las siguientes*

$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4.$ $\quad$ $P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5.$
$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1.$ $\quad$ $P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5.$
$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2.$ $\quad$ $P(w_3) = m_4, m_5, m_1, m_2, m_3.$
$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2.$ $\quad$ $P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3.$
$P(m_5) = w_1, w_2, w_4.$

Primer etapa. Cada hombre propone a la mujer más preferida. $m_1, m_4, m_5,$ le proponen a w_1 y $m_2, m_3,$ le proponen a w_4. Ahora las mujeres selecciona su mejor propuesta, w_1 elige a m_1, y w_4 elige a m_2. Indicamos los compromisos por:

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ & & & \\ m_1 & & & m_2 \end{pmatrix}.$$

Segunda etapa. Los hombres rechazados en la etapa anterior le proponen a la mujer siguiente en sus órdenes de preferencias. $m_3, m_4, m_5,$ le proponen a w_3, w_4, w_2, respectivamente. La mujer w_4, que tiene dos propuestas

m_2, m_4,elige a m_4.

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_1 & m_5 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Tercera etapa. El hombre rechazado en la etapa anterior le propone a la mujer siguiente en sus órdenes de preferencias. m_2 le proponen a w_3. La mujer w_3, que tiene dos propuestas m_2, m_3,elige a m_2.

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_1 & m_5 & m_2 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Cuarta etapa. El hombre rechazado en la etapa anterior le propone a la mujer siguiente en sus órdenes de preferencias. m_3 le proponen a w_1. La mujer w_1, que tiene dos propuestas m_1, m_3,elige a m_3.

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_3 & m_5 & m_2 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Quinta etapa. El hombre rechazado en la etapa anterior le propone a la mujer siguiente en sus órdenes de preferencias. m_1 le proponen a w_2. La mujer w_2, que tiene dos propuestas m_1, m_5,elige a m_1.

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Sexta etapa. El hombre rechazado en la etapa anterior le propone a la mujer siguiente en sus órdenes de preferencias. m_5 le proponen a w_{34}. La mujer w_4, que tiene dos propuestas m_4, m_5,elige a m_4.

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 \end{pmatrix}.$$

El hombre rechazado m_5 no puede hacer más propuestas, por lo tanto queda soltero. El matching final queda:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & m_5 \\ \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{pmatrix}.$$

En forma similar se puede calcular el algoritmo de aceptación diferida con las mujeres proponiendo, este matching se lo denota por μ_W, para el ejemplo anterior

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & m_5 \\ \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{pmatrix}.$$

Este matching tiene la propiedad de estabilidad como μ_M.

En este ejemplo se observa que los hombres prefieren μ_M a μ_W, salvo el hombre m_5. Mientras que las mujeres prefieren μ_W a μ_M. Esta observación vale en general. Veamos la siguiente notación. $\mu P(M)\mu'$ denota que todos los hombres prefieren μ al menos tanto como μ' (o equivalentemente no existe hombre m tal que $\mu'(m)P(m)\mu(m)$) y que al menos exista un hombre $\overline{m}$ tal que $\mu(\overline{m})P(\overline{m})\mu'(\overline{m})$. $\mu P_{\sim}(M)\mu'$ denota que $\mu P(M)\mu'$ o que todos los hombres son indiferentes entre μ y μ'.

Teorema 2 *(Gale y Shapley) Cuando todos los hombres y mujeres tienen preferencias estrictas entonces μ_M es un matching M–ptimo (es decir que para cualquier otro matching estable μ se cumple que $\mu_M P_{\sim}(M)\mu$) y μ_W es un matching W–ptimo (definición análoga a M–ptimo, pero para las mujeres).*

También vale el siguiente resultado

Corolario 1 *Cuando todos los hombres y mujeres tienen preferencias estrictas entonces μ_M es el peor de los matching estables para las mujeres, esto es para todo matching estable μ se cumple que $\mu P_{\sim}(W)\mu_M$. Un resultado análogo vale para μ_W.*

Los dos últimos resultados dicen que los agentes de un lado del mercado de asignación tienen un interés común ya que todos coinciden con el mejor de los matching estables. Por otro lado se nota una antagonismo entre los dos grupos de agentes ya que el mejor de los matching estables para un grupo es el peor para el otro grupo. Este resultado vale en general es decir, para cualquier par de matching estables.

Teorema 3 *(Knuth) Cuando los agentes tienen preferencias estrictas, las preferencias comunes de ambos lados del modelo de asignación son opuestos sobre el conjunto de matching estables es decir, que si μ, μ' son matching estables y $\mu P(M)\mu'$ entonces $\mu' P(W)\mu$.*

En el ejemplo también se observa que el hombre m_5 queda soltero en ambos matching μ_M y μ_W. Este resultado también se generaliza

Teorema 4 *En el modelo de asignación* $(M, W, \mathbf{P})$ *con preferencias estrictas, el conjunto de agentes que son singles o solteros es la mismo para todo los matching estables.*

1.4. Generalización al modelo de hospital

El modelo asignación o matrimonio visto hasta ahora asigna un hombre a una mujer. También se los conoce como matching uno a uno (one to one matching). Este modelo se puede generalizar a un modelo de asignación para empresas, en este caso hay dos conjuntos –finitos– Empresas y Trabajadores (many to one matching). Cada empresa puede emplear a varios trabajadores, mientras que los trabajadores solo pueden estar en una empresa . Este es el caso de los médicos residentes visto al principio.

Los trabajadores ordenan las empresas en forma similar al modelo de matrimonio. Las empresas supondremos que tiene un cupo, es decir que solo pueden ocupar a lo más un cierto número de empleados (esta hipótesis en el modelo puede venir dada por alguna restricción de presupuesto, lugar físico, etc). También supondremos que se cumple la hipótesis de compatibilidad en las preferencias de las empresas: si dos conjuntos trabajadores difieren en un trabajador uno de esos conjuntos es más preferido que el otro si y solo si contiene al trabajador (distinto) que individualmente es más preferido. Bajo estas hipótesis se adapta el algoritmo visto en caso anterior, para mostrar que existen matching estables, μ_F cuando las empresas comienzan proponiendo y μ_W cuando los trabajadores empiezan proponiendo.

Si bien el algoritmo NIMP es diferente del algoritmo de aceptación diferida, se puede probar que el algoritmo NIMP produce un matching estable y que además coincide con μ_F.

2. Definición de Juegos Cooperativos. Dominancia. Núcleo.

Uno de los conceptos más importantes de juegos cooperativos es el de Núcleo. Veremos que el conjunto de matching estables en el modelo de asignación es igual al núcleo de un juego cooperativo.

En general un juego es descripto por un conjunto de *jugadores*, un conjunto de *resultado factibles*, *preferencias* de jugadores sobre resultados y *reglas*, estas determinarán como el juego es jugado. Una forma de definir las reglas en juegos cooperativos es dar las coaliciones (subconjuntos no vacos de jugadores) autorizadas por las reglas del juego a sustentar algún resultado. En el caso del modelo de asignación para que un matrimonio se lleve a cabo es necesario y suficiente que el hombre y la mujer (involucrados) estén de acuerdo.

Las reglas del juego junto con un orden específico de preferencias de los jugadores induce una relación sobre los resultados, llamada *relación de dominación*.

Definición 4 *Dados dos resultados factibles x e y, x domina a y si existe una coalición de jugadores S tal que:*

1. *cada miembro de la coalición de S prefieren x a y.*
2. *las reglas del juego dan a la coalición S el poder de forzar el resultado x.*

Esto dice x domina a y si existe alguna coalición S cuyos miembros tienen el incentivo y los medios para cambiar el resultado de y a x. Por esta razón, si x domina a y, podemos esperar que y no sea el resultado del juego.

Definición 5 *El Núcleo (Core) de un juego es el conjunto de resultados no–dominados.*

La diferencia entre la definición de núcleo y del conjunto de asignaciones estables para el juego de asignación yace en el hecho que el núcleo esta definido vía una relación de dominación en la cual todas las coaliciones juegan un rol potencial, mientras que el conjunto de asignaciones estables esta definida con respecto a ciertas clases de coaliciones (un miembro de cada lado, es decir ciertas coaliciones de 2 jugadores). Esto es equivalente a decir, que una resultado no pertenece al núcleo si existe una coalición de agentes o jugadores que bloquean dicho resultado, mientras que un resultado no es estable si existen uno o un par de agentes que lo bloquean (al resultado).

Formalmente, para el mercado de asignación una asignación μ' domina a μ si existe una coalición $A \subseteq M \cup W$ tal que para cada $m, w \in A$,

$$\mu'(m) \in A, \qquad \mu'(w) \in A, \qquad \mu'(m)P(m)\mu(m), \qquad \mu'(w)P(w)\mu(w).$$

Esto es, la reglas del juego permiten a los miembros de la coalición A a casarse entre ellos y así obtener un nuevo resultado o matching μ' de tal forma que todos los miembros de A prefieren esta nuevo matching al matching μ.

2.1. Relación entre núcleo y conjunto de asignaciones estables.

Teorema 5 *El core del modelo de asignación es igual al conjunto de matching estables*

Demostracin. Si μ is individualmente irracional (i.e. existe un individuo que prefiere quedarse soltero antes que machearse con el individuo asignado por μ), entonces es dominado vía la coalición formada por ese individuo.

Si μ es inestable es decir existen m, w tal que $wP(m)\mu(m)$ y $mP(w)\mu(w)$ entonces μ es dominado por la coalición $A = \{m, w\}$ via μ' donde $\mu'(m) = w$.

En la otra dirección, si μ no está en el core, entonces μ es dominado por μ' vía la coalición A. Si μ no es individualmente irracional, implica que $\mu'(w) \in M$ para todo $w \in A$ (ya que $\mu'(w)P(w)\mu(w)$). Elegimos algún $w \in A$ y $m = \mu'(w)$. Entonces m, w bloquea a μ.

3. Aspectos Estratégicos

Hasta ahora hemos hablado de asignaciones bilaterales (matching), que para un perfil de preferencias dado satisfacen ciertas condiciones deseables tales como: individualidad racional, estabilidad, etc. Sin embargo, desde el punto de vista de diseño, no basta con identificar las asignaciones que podrían ser satisfactorias en circunstancias específicas. Conviene estudiar procedimientos sistemáticos que le atribuyan una o varias asignaciones a cada posible situación social, a cada perfil de preferencias.

La estructura de estos mecanismos podrían describirse como siguen: Se le pregunta a cada hombre y mujer del mercado cual es su preferencia, teniendo como dato este perfil se le hace corresponder una asignación bilateral. Es decir, esto puede describirse como una función del conjunto de perfiles de preferencias en el conjunto de asignaciones bilaterales.

Preguntamos cuales son las condiciones deseables de esta función. Una de ellas es que el agente no tenga incentivos para mentir cuando se le pregunta cual es su preferencia

Sean
$M = \{m_1, .., m_n\}$ conjunto de hombres.
$W = \{w_1, .., w_p\}$ conjunto de mujeres.
$\mathcal{P}(m_i)$ el conjunto de las preferencias posibles de m_i sobre $W \cup \{m_i\}$.
$\mathcal{P}(w_j)$ el conjunto de las preferencias posibles de w_j sobre $M \cup \{w_j\}$.
$\mathcal{P}$ el conjunto de los perfiles posibles de preferencias.

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(m_i) \times \prod_{j=1}^{p} \mathcal{P}(w_j)$$

$\mathcal{M}$ el conjunto de todas las asignaciones bilaterales (Matching) posibles.
Una regla de asignación es una función

$$\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$$

es decir una regla que asigna a cada perfil de preferencia una asignación bilateral.

Definición 6 *Una regla de asignación bilateral* $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ *es* individualmente racional *si para todo* $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ *la asignación bilateral* $\mu = \Phi(\mathbf{P})$ *es individualmente racional. i.e.* $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}$, $\forall m_i \in M \Longrightarrow \mu(m_i)\mathbf{P}(m_i)m_i$ *&* $\forall w_j \in W \Longrightarrow \mu(w_j)\mathbf{P}(w_j)w_j$.

Definición 7 *Una regla de asignación bilateral* $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ *es* estable *si para todo* $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ *la asignación bilateral* $\mu = \Phi(\mathbf{P})$ *es estable. i.e.* $\nexists m_i \in M$ *&* $w_j \in W$ *tal que* $w_j\mathbf{P}(m_i)\mu(m_i)$ *&* $m_i\mathbf{P}(w_j)\mu(w_j)$.

Ejemplo 3 $\Phi_M(\mathbf{P}) = \mu_M$ *o* $\Phi_W(\mathbf{P}) = \mu_W$.

Recordemos que el mecanismo propuesto era que a cada agente se le preguntaba cual era su preferencia y con este dato se decidía cual era la asignación bilateral. Una pregunta que surge es si los agentes tienen o no insentivo ha declarar su verdadera preferencia. Cuando tal insentivo no existe diremos que la regla de asignación bilateral es no manipulable.

Diremos que una regla de asignación es manipulable si existe un estado de opinión (perfil de preferencia) en el que, para algún agente, declarar sus verdaderas preferencias no es la mejor opción. i.e. este agente puede sacar ventajas declarando una preferencia no real. En este caso se dice que el agente esta manipulando la regla de asignación.

Definición 8 *Dada una regla de asignación bilateral* $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ *y un perfil de preferencias* $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, *diremos que* $m_i(w_j)$ *manipula la regla* Φ *en el perfil* $\mathbf{P}$ *si existe otra preferencia* $\mathbf{P}^{'}(m_i) \in \mathcal{P}(m_i)$ $\left(\mathbf{P}^{'}(w_j) \in \mathcal{P}(w_j)\right)$ *tal que:*

$$\mu^{'}(m_i)\mathbf{P}(m_i)\mu(m_i) \qquad \left(\mu^{'}(w_j)\mathbf{P}(w_j)\mu(w_j)\right)$$

donde $\mu = \Phi(\mathbf{P})$ *y* $\mu^{'} = \Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(m_i))$ $\left(\mu^{'} = \Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w_j))\right)$.

Definición 9 *Dada una regla de asignación bilateral* $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ *es* manipulable *si existe un perfil de preferencias* $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ *y existe* m_i *ó* w_j *que manipula la regla* Φ *en el perfil* $\mathbf{P}$.

Observemos que esta dice que existe un estado de opinión $\mathbf{P}$ en el que para algún agente m_i (w_j) declarar una preferencia no real $\mathbf{P}^{'}(m_i)$ $(\mathbf{P}^{'}(w_j))$ es mejor que declarar la verdad $\mathbf{P}(m_i)$ $(\mathbf{P}(w_j))$.

Ejemplo 4 *Sea* $\mu = \Phi(\mathbf{P})$ *la siguiente regla de asignación:*

$$\mu(m_1) = \textit{óptimo para } \mathbf{P}(m_1)$$

$$\mu(m_2) = \textit{óptimo para } \mathbf{P}(m_2) \textit{ eliminando } \mu(m_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots..$$

$$\mu(m_i) = \textit{óptimo para } \mathbf{P}(m_i) \textit{ eliminando } \mu(m_1) \cdot \cdot \mu(m_{i-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Concretamente si $\mathbf{P}(m_1) = w_1 w_2 m_i$ *y* $\mathbf{P}(m_2) = w_1 w_2 m_i$, $\mathbf{P}(w_1) = m_1 w_1$ *y* $\mathbf{P}(w_2) = m w_2$ *entonces* $\mu(m_1) = w_1$ *y* $\mu(m_2) = w_2$.

Esta regla es no manipulable porque las mujeres no cambian el resultado alterando sus preferencias y los hombres obtienen lo mejor, por consiguiente no tienen insentivo a alterar su declaración. Naturalmente esta regla no es una regla deseable porque no es individualmente racional y por consiguiente no estable.

Ejemplo 5 *Sea* $\Phi(\mathbf{P}) = \mu_M$.

Sean $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
$\mathbf{P}(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$
$\mathbf{P}(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$
$\mathbf{P}(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$
$\mathbf{P}(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$
$\mathbf{P}(m_5) = w_1, w_2, w_4$
$\mathbf{P}(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$
$\mathbf{P}(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$
$\mathbf{P}(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$
$\mathbf{P}(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$
Entonces

$$\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos que la mujer w_1 decide no declarar su verdadera preferencia $\mathbf{P}(w_1)$ y declara $\mathbf{P}^{'}(w_1) = m_2, m_3, m_4, m_5, m_1$. Si aplicamos el mismo mecanismo M-optimal al nuevo perfil $(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w_1))$, mediante la aplicación del algoritmo de aceptación diferida para los hombres obtenemos

Primera etapa

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_4 & & & m_2 \end{pmatrix}$$

Segunda etapa

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_4 & m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

Tercer etapa

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_4 & m_1 & m_3 & m_5 \end{pmatrix}$$

Cuarta etapa

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_4 & m_1 & m_3 & m_5 \end{pmatrix}$$

Quinta etapa

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_5 \end{pmatrix}$$

Sexta etapa

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mu_M^{'} = \Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w_1))$ es

$$\mu_M^{'} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{pmatrix}$$

con lo cual si comparamos los resultados obtenidos por la mujer w_1

$$m_3 = \mu_M^{'}(w_1)\mathbf{P}(w_1)\mu_M(w_1) = m_1$$

lo cual nos dice que la mujer w_1 obtiene ventajas mintiendo sobre su verdadera preferencia i.e. declarando $\mathbf{P}^{'}(w_1)$ en lugar de $\mathbf{P}(w_1)$. La regla M-optimal es manipulable.

Teorema 6 ***(Teorema de imposibilidad):*** *No existe una regla de asignación bilateral $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ estable y no manipulable.*

Demostración: Primero demostraremos el teorema para el caso $\#M = 2 = \#W$ y luego veremos como se extiende al caso general.

Consideremos el siguiente perfil de preferencias $\mathbf{P} = (\mathbf{P}(m_1), \mathbf{P}(m_2), \mathbf{P}(w_1), \mathbf{P}(w_2))$ con:

$$\mathbf{P}(m_1) = w_1 w_2$$

$$\mathbf{P}(m_2) = w_2 w_1$$
$$\mathbf{P}(w_1) = m_2 m_1$$
$$\mathbf{P}(w_2) = m_1 m_2$$

Con este perfil de preferencias existen solo dos asignaciones estables:

$$\mu = \mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \mu_W = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

Que estos son las dos únicas asignaciones bilaterales estables surge del hecho que si alguien se queda solo en una asignación bilateral estable se queda solo en todas las asignaciones estables.

Note que para cualquier Φ nosotros tenemos:

$$\Phi(\mathbf{P}) = \begin{cases} \mu \\ \text{ó} \\ \nu \end{cases}$$

Supongamos que $\Phi(\mathbf{P}) = \mu$. Demostraremos que la mujer w_2 manipula el perfil $\mathbf{P}$. Sea $\mathbf{P}^{'}(w_2) = m_1 w_2$. Consideremos el perfil de preferencias $\mathbf{P}^{'} = (\mathbf{P}(m_1), \mathbf{P}(m_2), \mathbf{P}(w_1), \mathbf{P}^{'}(w_2))$ este perfil tiene una única asinación bilateral estable:

$$\nu = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

esto es porque $\mu_M^{'} = \nu$ y del hecho que si alguien se queda solo en una asignación bilateral estable se queda solo en todas las asignaciones estables. Luego $\Phi(\mathbf{P}^{'}) = \nu$. Pero

$$\Phi(\mathbf{P}^{'}) = \nu(w_2) = m_1 \mathbf{P}(w_2) \Phi(\mathbf{P}) = \mu(w_2) = m_2$$

lo cual implica que w_2 puede manipular la asignación.

Supongamos ahora que $\Phi(\mathbf{P}) = \nu$. En este caso demostraremos que el hombre m_2 manipula el perfil $\mathbf{P}$. Sea $\mathbf{P}^{'}(m_2) = w_2 m_2$. Consideremos el perfil de preferencias $\mathbf{P}^{'} = (\mathbf{P}(m_1), \mathbf{P}^{'}(m_2), \mathbf{P}(w_1), \mathbf{P}(w_2))$ este perfil tiene una única asignación bilateral estable:

$$\mu = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ & \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

esto es porque $\mu^{'}_M = \mu$ y del hecho que si alguien se queda solo en una asignación bilateral estable se queda solo en todas las asignaciones estables. Luego $\Phi(\mathbf{P}^{'}) = \mu$. Pero

$$\Phi(\mathbf{P}^{'}) = \mu(m_2) = w_2 \mathbf{P}(m_2) \Phi(\mathbf{P}) = \nu(m_2) = w_1$$

lo cual implica que m_2 puede manipular la asignación.

Para demostrar en el caso general $\#M = n$ y $\#W = p$, simplemente consideremos el siguiente perfil de preferencias
$\mathbf{P} = (\mathbf{P}(m_1), \mathbf{P}(m_2), .., \mathbf{P}(m_n), \mathbf{P}(w_1), \mathbf{P}(w_2), .., \mathbf{P}(w_p))$ con:

$$\mathbf{P}(m_1) = w_1 w_2 m_1$$

$$\mathbf{P}(m_2) = w_2 w_1 m_2$$
$$\mathbf{P}(m_3) = m_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{P}(m_n) = m_n$$
$$\mathbf{P}(w_1) = m_2 m_1 w_1$$
$$\mathbf{P}(w_2) = m_1 m_2 w_2$$
$$\mathbf{P}(w_3) = w_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{P}(w_p) = w_p$$

en este caso las dos únicas asignaciones estables son:

$$\mu = \mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_n \\ & & & & \\ w_1 & w_2 & m_3 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

$$\nu = \mu_W = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_n \\ \\ w_2 & w_1 & m_3 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

La misma argumentación que en el caso con cardinalidad dos. ■

Hemos visto que en cualquier mecanismo de asignación estable existe un perfil de preferencias que es manipulable y como consecuencia de ello el mecanismo es manipulable. Entonces surgen las siguientes preguntas, Dado un mecanismo $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ estable.

Son todos los perfiles $\mathbf{P}$ manipulables?.

Cuándo un agente puede manipular un perfil?.

Qué debe conocer el agente para saber si puede manipular un perfil?.

Ejemplo 6 *Sea* $\Phi(\mathbf{P}) = \mu_M$.

Sean $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
$\mathbf{P}(m_1) = w_1, w_2, m_1$
$\mathbf{P}(m_2) = w_4, w_2, m_2$
$\mathbf{P}(m_3) = w_4, w_3, m_3$
$\mathbf{P}(m_4) = w_1, w_4, m_4$
$\mathbf{P}(m_5) = w_1, w_2, w_4$
$\mathbf{P}(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$
$\mathbf{P}(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$
$\mathbf{P}(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$
$\mathbf{P}(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$
Entonces

$$\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos que la mujer w_1 decide no declarar su verdadera preferencia $\mathbf{P}(w_1)$ y declara $\mathbf{P}^{'}(w_1) = m_2, m_3, m_4, m_5, m_1$. Si aplicamos el mismo mecanismo M-optimal al nuevo perfil $(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w_1))$ obtenemos
$\mu_M^{'} = \Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w_1))$ donde:

$$\mu_M^{'} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_2) \\ \\ m_4 & m_1 & m_3 & m_5 & m_2 \end{pmatrix}$$

con lo cual si comparamos los resultados obtenido por la mujer w_1

$$m_1 = \mu_M(w_1)\mathbf{P}(w_1)\mu_M(w_1) = m_4$$

lo cual nos dice que la mujer w_1 NO obtiene ventajas mintiendo sobre su verdadera preferencia i.e. declarando $\mathbf{P}^{'}(w_1)$ en lugar de $\mathbf{P}(w_1)$.

No todos los perfiles son manipulables.

No todos los agentes pueden manipular un determinado perfil.

Para manipular se necesita mucha información sobre las preferencias de los otros agentes.

Teorema 7 *Dada una regla de asignación bilateral $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ estable. Dado un perfil de preferencias $\mathbf{P}$ para el cual existen mas de una asignación bilateral estable. Entonces el perfil $\mathbf{P}$ es manipulable.*

Demostración: Sea

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}(m_1), \mathbf{P}(m_2), .., \mathbf{P}(m_n), \mathbf{P}(w_1), \mathbf{P}(w_2), .., \mathbf{P}(w_p))$$

un perfil de preferencias tal que existen mas de una asignación bilateral estable. i. e. $\mu_M \neq \mu_W$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Phi(\mathbf{P}) = \mu \neq \mu_W$. Recordemos que si $\mu(w) \neq \mu_W(w)$ entonces $\mu_W(w)\mathbf{P}(w)\mu(w)$.

Sea $w^{'} \in W$ tal que $\mu_W(w^{'})\mathbf{P}(w^{'})\mu(w^{'})$ es decir:

$$\mathbf{P}(w^{'}) = \cdots\cdot\mu_W(w^{'})\cdots\cdot\mu(w^{'})\cdots\cdot\mu_M(w^{'})\cdots\cdots$$

Supongamos que $w^{'}$ cambia su preferencia por aquella que considera como no aceptable todo aquello que es peor que $\mu_W(w^{'})$,

$$\mathbf{P}^{'}(w^{'}) = \cdots\cdot\mu_W(w^{'})w^{'}$$

Si consideramos el perfil $(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w^{'}))$ tenemos que μ_W sigue siendo estable para dicho perfil. Sea $\Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w^{'})) = \mu^{'}$. Como $\mu^{'}$ es estable en $(\mathbf{P}, \mathbf{P}^{'}(w^{'}))$ y ademas $\mu^{'}(w^{'}) \in M$, tenemos que

$$\mu^{'}(w^{'})\mathbf{P}^{'}(w^{'})\mu_W(w^{'})$$

$$ó$$

$$\mu^{'}(w^{'}) = \mu_W(w^{'})$$

lo cual implica que

$$\mu^{'}(w^{'})\mathbf{P}(w^{'})\mu(w^{'})$$

luego $w^{'}$ manipula a $\mathbf{P}$. ∎

Teorema 8 *Sea la regla de asignación bilateral estable* $\Phi_M : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ *definida por* $\Phi_M(\mathbf{P}) = \mu_M$. *Entonces*

a) El perfil $\mathbf{P}$ es no-manipulable para todo $m \in M$.
b) Si $\mu_M \neq \mu_W$ existe $w \in W$ tal que el perfil $\mathbf{P}$ es manipulable para w.
Demostración:

$\blacksquare$

Hemos estudiado la manipulabilidad del perfil $\mathbf{P}$ por agentes de M en el mecanismo de asignación Φ_M. Estudiaremos la manipulabilidad por grupos de agentes.

Definición 10 *: Dado* $C \subset W \cup M$ *y un perfil*
$\mathbf{P} = (\mathbf{P}(m_1), \mathbf{P}(m_2), .., \mathbf{P}(m_n), \mathbf{P}(w_1), \mathbf{P}(w_2), .., \mathbf{P}(w_p))$ *definimos*

$$\mathbf{P}_C = (\mathbf{P}_C(m_1), \mathbf{P}_C(m_2), .., \mathbf{P}_C(m_n), \mathbf{P}_C(w_1), \mathbf{P}_C(w_2), .., \mathbf{P}_C(w_p))$$

con $\mathbf{P}_C(x) = \mathbf{P}(x)$ para todo $x \notin C$.

Teorema 9 *Dados un perfil de preferencias* $\mathbf{P}$ *y una coalición* $C \subset M \cup W$. *No existe un perfil de preferencias* $\mathbf{P}_C$ *y una asignación bilateral* μ_C *estable en* $\mathbf{P}_C$ *tal que*

$$\mu_c(x)\mathbf{P}(x)\mu(x)$$

para todo $x \in C$ *y todo* μ *estable en* P.

Este Teorema reafirma que para manipular un perfil uno no solo debe conocer el perfil de preferencias sino también el mecanismo Φ.